

«Οι γραφικές παραστάσεις απαραίτητο εργαλείο στη φαρέτρα του μαθητή»

Αρδαβάνη Καλλιόπη¹, Μαργιόρα Φιλίππα², Μαυρουδής Σπύρος³

¹ Καθηγήτρια Μαθηματικών 3ο Γυμνάσιο Γλυφάδας, επιμορφώτρια Β' επιπέδου
ropiadv@hotmail.com

² Καθηγήτρια Μαθηματικών, υποδιευθύντρια 1ου Γυμνασίου Κορωπίου
filba@otenet.gr

³ Καθηγητής Μαθηματικών, επιμορφωτής Β' επιπέδου
smayroudis@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία προτείνονται περισσότερες της μίας λύσης ενός προβλήματος οι οποίες προσδιορίζονται γραφικά και αλγεβρικά, ενώ στο σχολικό βιβλίο το ίδιο πρόβλημα προσεγγίζεται μόνο με μία αλγεβρική λύση. Η διδακτική πρόταση που ακολουθεί υποστηρίζει όλες τις διαφορετικές ιδέες των μαθητών που ενδέχεται να ακουστούν μέσα στην τάξη για τη λύση του προβλήματος και τους ενθαρρύνει σε πειραματισμό για τον προσδιορισμό της λύσης αυτής με ένα έτοιμο μοντέλο κατασκευασμένο με λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Αναμένουμε να προκύψουν αρκετές προτάσεις για την κατάστρωση σχεδίου επίλυσης του προβλήματος κάτω από το πρίσμα διαφορετικών οπτικών και οι ομάδες των μαθητών μέσα από τη συνεργατική δράση των μελών τους να οδηγηθούν στην εύρεση λύσης και στην παρουσίαση των ευρημάτων τους στις άλλες ομάδες ώστε να μεταλαμπαδευτεί η νέα γνώση που οικοδομήθηκε.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: τριώνυμο, γραφική παράσταση συνάρτησης, ευθεία, υπερβολή, παραβολή, γραφική και αλγεβρική λύση συστήματος

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με το προτεινόμενο σενάριο οι μαθητές καλούνται να λύσουν ένα υποθετικό γεωμετρικό πρόβλημα που ζητάει την εύρεση διαστάσεων για την κατασκευή μιας ορθογώνιας πισίνας με δεδομένη περίμετρο και εμβαδό. Αυτό το ερώτημα έχει πολύ ενδιαφέρον αν ανοίξει λίγο. Αν αρχικά οι μαθητές γνωρίζουν μόνο τη περίμετρο ή μόνο το εμβαδόν της πισίνας τι αλλάζει; Πώς αντιδρούν οι μαθητές όταν στο πρόβλημα που τους δίνεται δεν υπάρχει μόνο μία λύση; Πώς ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας θα βοηθήσει να γίνουν μικροί ερευνητές; Πώς θα αλληλεπιδράσουν με το γεωμετρικό μοντέλο μιας πισίνας και θα συνδέσουν τη μία της κορυφή με τα σημεία γραφήματος μιας συνάρτησης; Πώς θα ανακαλύψουν τη σχέση των τομών δύο γραμμών με τη λύση του προβλήματος;

Οι μαθητές έχοντας ως θεμέλιο λίθο κάποιες βασικές γνώσεις τόσο στο πεδίο της γεωμετρίας όπως οι τύποι εμβαδού και περιμέτρου ορθογωνίου, όσο και στο πεδίο της άλγεβρας όπως η γνώση των αναλόγων, αντιστρόφως αναλόγων ποσών,

τριωνύμου και των αντίστοιχων γραφικών τους παραστάσεων, εμπλέκονται ενεργά στη διαδικασία της μάθησης με όλες αυτές τις υπό διαπραγμάτευση έννοιες και με τη βοήθεια που τους παρέχει η χρήση των ΤΠΕ λαμβάνουν ερεθίσματα για επιπλέον διερεύνηση του προβλήματος που μελετούν. Η αρχή είναι το σημείο που κερδίζουμε ή χάνουμε το μάθημα (Ελισσάβετ Καμπάνη). Βάζοντας το πρόβλημα με ανοικτή ερώτηση έχουμε ως αποτέλεσμα να εμφανίζεται το ενδεχόμενο προσέγγισης της λύσης του υπό μία από πέντε διαφορετικές οπτικές γωνίες, όταν δοθεί αργότερα ή άλλη σχέση. Σύμφωνα με τις σύγχρονες γνωστικές θεωρίες μάθησης, οι μαθητές εργάζονται ομαδοσυνεργατικά έχοντας ως βάση τους την πρότερη γνώση, την επεκτείνουν και οικοδομούν τη νέα. Δίνεται η ευκαιρία να βγουν στην επιφάνεια παρανοήσεις μαθητών και μέσα από τη διερεύνηση και τον έλεγχο με τη βοήθεια του λογισμικού να ξεδιαλύνουν. Οι ίδιοι οι μαθητές μέσα από τις δύο πρώτες φάσεις κατά τις οποίες εκτυλίσσεται το σενάριο, φτάνουν στην κατάκτηση της γνώσης επίλυσης συστήματος δύο μη γραμμικών απαραίτητα εξισώσεων με δύο αγνώστους, με γραφικό αλλά και με αλγεβρικό τρόπο.

ΑΞΙΟΝΕΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

1. **Τίτλος διδακτικού σεναρίου:** “Οι γραφικές παραστάσεις απαραίτητο εργαλείο στη φαρέτρα του μαθητή.”
2. **Εκτιμώμενη διάρκεια διδακτικού σεναρίου:** Για την υλοποίηση του σεναρίου απαιτούνται 4-5 διδακτικές ώρες.
3. **Ένταξη του διδακτικού σεναρίου στο πρόγραμμα σπουδών/προαπαιτούμενες γνώσεις**

Οι γνωστικές περιοχές που εμπλέκονται σε αυτό το διδακτικό σενάριο είναι τριώνυμο, γραφική παράσταση συνάρτησης και γραφική λύση συστήματος δύο εξισώσεων στην Άλγεβρα και η περίμετρος και το εμβαδό ορθογωνίου στη Γεωμετρία.

Το σενάριο απευθύνεται σε μαθητές Γ' Γυμνασίου και οι προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών είναι:

- γνώση επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης
- γνώση επίλυσης κλασματικών εξισώσεων
- γνώση των αναλόγων ποσών και της γραφικής παράστασης που τα εκφράζει (ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων)
- γνώση της γραφικής παράστασης συμμεταβαλλόμενων μεγεθών με σταθερό άθροισμα (ευθεία που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων)
- γνώση της σχέσης των αντιστρόφως αναλόγων ποσών και της καμπύλης που παριστάνει γραφικά τη σχέση αυτή (υπερβολή)
- γνώση της γραφικής παράστασης ενός τριωνύμου, δηλαδή της καμπύλης της παραβολής
- γνώση των τύπων του Εμβαδού, Περιμέτρου και Ημiperιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Το προτεινόμενο σενάριο είναι κατάλληλο για το επίπεδο γνώσεων των μαθητών της τρίτης τάξης γυμνασίου γιατί έχουν διδαχτεί από τη Β' γυμνασίου την έννοια των συναρτήσεων, τις γραφικές παραστάσεις των αναλόγων και

αντιστρόφως αναλόγων ποσών καθώς και κατά τη διάρκεια του τρέχοντος σχολικού έτους τις έννοιες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης και κλασματικής εξίσωσης, του τριωνύμου, της παραβολής και της επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων που καταλήγουν σε δευτεροβάθμια εξίσωση.

Από την εμπειρία μας, οι πιθανές δυσκολίες των μαθητών σε σχέση με το αντικείμενο που διαπραγματεύεται το συγκεκριμένο διδακτικό σενάριο εντοπίζονται:

- στην εύρεση αλγεβρικών τύπων για τη λύση ενός πραγματικού προβλήματος και στην επίλυση των εξισώσεων που προκύπτουν
- στην απεικόνιση της αλγεβρικής λύσης ενός συστήματος εξισώσεων σε ένα σημείο στο επίπεδο (καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων)
- στη συσχέτιση των γεωμετρικών εννοιών με αλγεβρικές έννοιες
- στην κατανόηση της ύπαρξης άπειρων σημείων-λύσεων μιας εξίσωσης με δύο αγνώστους (λύση ανοικτού προβλήματος) και στην απεικόνιση αυτών στη γραφική παράσταση της συνάρτησής τους.

4. Σκοποί και στόχοι του διδακτικού σεναρίου

α) ως προς το γνωστικό αντικείμενο και τη μαθησιακή διαδικασία:

Ο μαθητής να γνωρίζει ότι μία εξίσωση με δύο αγνώστους έχει άπειρες λύσεις. Να συνδέει μία πραγματική κατάσταση με τις συναρτήσεις και τις αναπαράστάσεις τους. Να ερμηνεύει και να επιλύει γραφικά ένα σύστημα δύο όχι απαραίτητα γραμμικών εξισώσεων. Να συσχετίζει τα πιθανά σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων με τις λύσεις του συστήματος. Να διερευνά και να εξηγεί σημεία - κορυφές της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σε σχέση με το πρόβλημα. Να αντιστοιχεί και να συνδέει ένα φυσικό μέγεθος του προβλήματος με μια μεταβλητή, να βρίσκει το εύρος των τιμών του και να ορίζει το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Να μπορεί να προσεγγίζει λύσεις ενός συστήματος εξισώσεων με δύο αγνώστους γραφικά ακόμη και όταν αυτές δεν είναι "βολικοί", ακέραιοι αριθμοί.

β) ως προς τη χρήση των ΤΠΕ:

Ο μαθητής να αξιοποιεί τα εργαλεία ενός δυναμικού λογισμικού π.χ. να αποδίδει σε ένα σημείο πολύ συγκεκριμένες ιδιότητες της μορφής $(x, f(x))$ και να παρατηρεί τη γραμμή που σχεδιάζει το ίχνος του, καθώς μεταβάλλεται η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x . Στη συνέχεια να μπορεί να ανακαλεί γνώσεις του και να ερμηνεύει τη γραμμή του ίχνους σε σχέση με το πείραμα και τα δεδομένα του προβλήματος.

γ) ως προς το παιδαγωγικό μέρος:

Οι μαθητές αναμένεται να μάθουν να πειραματίζονται με τις περιεχόμενες μαθηματικές έννοιες, να θέτουν ερωτήματα, να παρατηρούν, να ελέγχουν, να κάνουν εικασίες και τελικά να διαμορφώνουν άποψη και να την τεκμηριώνουν. Επίσης, να συνεργάζονται με τα άλλα μέλη της ομάδας για να συζητήσουν τις παρατηρήσεις τους, να οργανώσουν τα συμπεράσματά τους, να διατυπώσουν κανόνες, να ανακαλύψουν σχέσεις που συνδέουν μεγέθη και να παρουσιάσουν τα ευρήματά τους στις άλλες ομάδες οικοδομώντας έτσι

κώδικες επικοινωνίας ώστε να γίνονται αντιληπτοί από τα άλλα μέλη της ομάδας, από όλους τους συμμαθητές τους και από τον καθηγητή τους. Να διατυπώνουν ισχυρισμούς και να ελέγχουν την ορθότητά τους μέσα από κριτική, πειραματική διαδικασία. Τέλος, να ανακαλύπτουν διαφορετικές στρατηγικές προσέγγισης στο θέμα που ερευνούν.

5. Οργάνωση της τάξης - Διδακτικό συμβόλαιο - Χρήση Η.Υ. και γενικά ψηφιακών μέσων για το διδακτικό σενάριο

Οι μαθητές θα εργαστούν στο εργαστήριο πληροφορικής για όλες τις διδακτικές ώρες ή εναλλακτικά 1 ώρα στο εργαστήριο και τις υπόλοιπες στην τάξη με τη χρήση του διαδραστικού πίνακα ή netbooks. Έτσι, οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες των δύο ή τριών ατόμων (κατά προτίμηση η σύνθεση της ομάδας να γίνεται με διαφορετικού επιπέδου μαθητές) και εργάζονται σε έναν υπολογιστή. Παίρνουν ένα φύλλο εργασίας και καλούνται να το συμπληρώσουν καθοδηγούμενοι από αυτό, αφού μοιράσουν τους εξής ρόλους:

- α) μαθητής που χειρίζεται το ποντίκι και το πληκτρολόγιο και
- β) μαθητής που γράφει στο φύλλο εργασίας.

Οι ρόλοι αυτοί εναλλάσσονται ανά μία διδακτική ώρα, ή κατά τη διάρκεια της μίας ώρας. Απαντούν σε συγκεκριμένες ερωτήσεις που τους θέτει το φύλλο εργασίας, αφού πρώτα πειραματιστούν με τα εργαλεία του λογισμικού, διερευνήσουν, συζητήσουν μεταξύ τους, ανταλλάξουν τις απόψεις τους και καταλήξουν σε συγκεκριμένα συμπεράσματα, τα οποία και παρουσιάζουν στην ολομέλεια της τάξης. Ο καθηγητής περιφέρεται ανάμεσα στις ομάδες, συντονίζει το έργο τους, ενθαρρύνει και συμβουλεύει τους μαθητές, τους παροτρύνει να κάνουν εικασίες και να συζητούν μεταξύ τους, υποστηρίζει αυτούς που δυσκολεύονται είτε με το μαθηματικό αντικείμενο, είτε με το λογισμικό και σε τακτά χρονικά διαστήματα καλεί τις ομάδες να παρουσιάσουν τα ευρήματά τους τα οποία επικυρώνει αν είναι σωστά οπότε και διατυπώνει γενικεύσεις, ή στην περίπτωση που είναι λανθασμένα τα συζητάει εκ νέου και παρεμβαίνει βοηθητικά ώστε οι μαθητές να τα επαναδιαπραγματευτούν και να καταλήξουν στην κατάκτηση της νέας γνώσης.

Το λογισμικό με το οποίο μπορεί να υλοποιηθεί το συγκεκριμένο σενάριο είναι ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας όπως το Geogebra. Θα πρέπει ο διδάσκων καθηγητής να έχει περάσει από πριν τα απαιτούμενα αρχεία του λογισμικού Geogebra στους σταθμούς εργασίας των μαθητών στο εργαστήριο υπολογιστών αν εργαστούν εκεί, ενώ στην περίπτωση που εργαστούν μέσα στην τάξη με τη χρήση διαδραστικού πίνακα θα χρειαστεί να τα έχει περάσει μόνο στο laptop που θα χειριστεί ή στα netbooks των μαθητών. Στην περίπτωση που το σενάριο υλοποιηθεί μόνο με τη χρήση διαδραστικού πίνακα η ύπαρξη ενός ασύρματου ποντικιού που μεταφέρεται από ομάδα σε ομάδα μαθητών θα ήταν πολύ χρήσιμη ώστε να εμπλακούν ενεργά οι ίδιοι οι μαθητές στην όλη διαδικασία της μάθησης, να πειραματιστούν, να ανακαλύψουν σχέσεις και να οδηγηθούν σε συμπεράσματα. Ακόμη, θα πρέπει ο καθηγητής να έχει φροντίσει να εκτυπώσει και να αναπαράγει τα φύλλα εργασίας που συνοδεύουν το εν λόγω σενάριο τόσες φορές όσες και οι

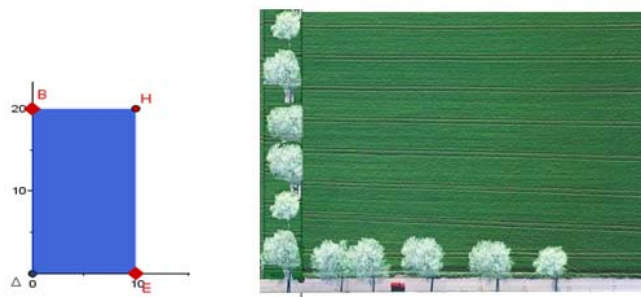
ομάδες των μαθητών του με όλες τις αναμενόμενες εκδοχές για τη λύση του προβλήματος κατά τη διάρκεια της β' φάσης του σεναρίου. Πιο συγκεκριμένα στη β' φάση ο εκπαιδευτικός δίνει σε κάθε ομάδα το φύλλο εργασίας που αντιστοιχεί στη λύση που προτείνει η ομάδα.

6. Περιγραφή και αιτιολόγηση του διδακτικού σεναρίου

A. Το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο στηρίζεται η πρόταση.

Το σενάριο αυτό προτείνεται να υλοποιηθεί με ομαδοσυνεργασία και ανακαλυπτική μάθηση. Το πρώτο μέρος θα είναι κοινό για όλες τις ομάδες μαθητών, στο δεύτερο όμως η κάθε ομάδα θα προχωρήσει στη δική της πορεία και στο τρίτο όλες οι ομάδες θα ανταλλάξουν τα ευρήματά τους ώστε να διαπιστώσουν όλοι τις πολλές και διαφορετικές πτυχές της λύσης του προβλήματος έχοντας κατακτήσει μία από αυτές. Ο διδάσκων πρέπει να είναι ενήμερος με τη πολλαπλότητα και διαφορετικότητα των λύσεων του προβλήματος, να υποστηρίζει κάθε άποψη των μαθητών, να μπαίνει στην ομάδα προς συζήτηση και να βοηθά την ομάδα να χαράξει τη δική της πορεία για τη λύση του προβλήματος. Ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας είναι απαραίτητο για την κατασκευή του μοντέλου μιας πισίνας και των ιδιοτήτων αυτής, όπως πισίνα με δεδομένη περίμετρο ή εμβαδό. Η σύνδεση των διαστάσεων της πισίνας με δεδομένη περίμετρο, με ένα σημείο του επιπέδου, επιτρέπουν στον μαθητή να παρατηρεί το ίχνος του σημείου κατά την αλλαγή των διαστάσεων της και να διερευνά τη σχέση τους. Το μοντέλο εμπνέει τον μαθητή να ορίσει τις τιμές του μήκους και του πλάτους μιας πισίνας, δηλαδή το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης. Αυτό αφήνουμε να προκύψει κατόπιν συνεννόησης μεταξύ των ομάδων με την προϋπόθεση να γίνει αποδεκτό από όλους.

B. Ας δούμε αναλυτικά τη ροή των δραστηριοτήτων του σεναρίου, όπως αναγράφονται αυτές στα φύλλα εργασίας που ακολουθούν.



Εικόνα 1

A' φάση: Τη πρώτη διδακτική ώρα οι μαθητές προβληματίζονται με τη κατασκευή μιας πισίνας σε σχήμα ορθογωνίου (εικόνα 1) και συζητούν τις ελάχιστες αποδεκτές από όλους (τους μαθητές) διαστάσεις της. Ο καθένας κατασκευάζει ένα ορθογώνιο και επιλέγει τις διαστάσεις του. Ο εκπαιδευτικός αναδεικνύει όλες αυτές τις επιλογές και μέσα από διάλογο με τους μαθητές γίνεται αποδεκτό από όλους ότι η θέση της τέταρτης κορυφής της μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του πρώτου τεταρτημορίου του επιπέδου, με συντεταγμένες (μήκος, πλάτος), όπου μήκος, πλάτος μεγαλύτερα από την

ελάχιστη τιμή που επέλεξαν προηγούμενα.

Στη συνέχεια απασχολούνται με το ερώτημα της εύρεσης των διαστάσεων μιας πισίνας με δεδομένη περίμετρο 82 μέτρων. Ο διδάσκων πρέπει να βοηθήσει να αναδειχτούν όλες οι απαντήσεις των μαθητών και να κατανοήσουν οι μαθητές ότι μία εξίσωση με δύο αγνώστους έχει πολλές λύσεις. Η ερώτηση του εκπαιδευτικού για την πρόβλεψη των θέσεων της τέταρτης κορυφής της πισίνας στο καρτεσιανό επίπεδο αναμένεται να φέρει τους μαθητές σε μεγάλη δυσκολία ή αδυναμία απάντησης. Ο εκπαιδευτικός παροτρύνει τους μαθητές να σχεδιάσουν την εικασία τους και στη συνέχεια συζητά μαζί τους τις επιλογές τους. Αποφεύγει κατάλληλες ερωτήσεις που προοδευτικά βοηθούν τους μαθητές να συνδέσουν την εξίσωση του προβλήματος με την εξίσωση ευθείας που διδάχθηκαν την προηγούμενη χρονιά. Αυτό σχεδιάζεται από το σενάριο αυτό να το ανακαλύψουν οι μαθητές στην επόμενη φάση.

Β' φάση: Διάρκεια 2-3 διδακτικές ώρες. Δίνεται στους μαθητές το παρακάτω πρόβλημα:

Το πρόβλημα:

Ένας μεγαλοεργολάβος πρόκειται να υλοποιήσει την επιθυμία ενός βολικού πελάτη, ο οποίος (πελάτης) επιθυμεί την κατασκευή μιας ορθογώνιας πισίνας, τις διαστάσεις της οποίας τις αφήνει στην «κρίση» του μεγαλοεργολάβου.

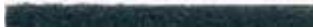
Ο μεγαλοεργολάβος έχει 2 αποθήκες υλικών.

Αποθήκη Α: με πλακάκια εδάφους (εικόνα 2) stock 400τ.μ.



Εικόνα 2

Αποθήκη Β: με αντιολισθητική ταινία (εικόνα 3) που τοποθετείται περιμετρικά σε μια πισίνα stock 82μ



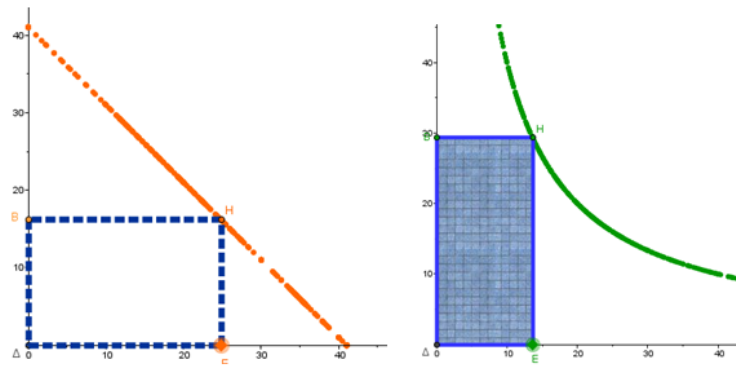
Εικόνα 3

Ο μεγαλοεργολάβος επωφελούμενος της «ελαστικότητας» της κατασκευής σκέπτεται να «ξεφορτωθεί» όλο το stock (και των δυο αποθηκών).

Το ερώτημα:

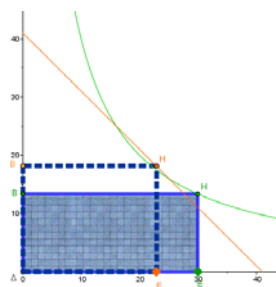
Ποιες είναι οι προτεινόμενες διαστάσεις της πισίνας ώστε η περίμετρός της να είναι 82μ. και το εμβαδόν της 400τ.μ.;

Το ενδιαφέρον της ιστορίας είναι ότι υπάρχουν εξαιρετικές ιδέες για την προσέγγιση της λύσης του προβλήματος, όπου ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να συμβάλλει στην εύρεση τους. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ακούσει κάθε μία από αυτές, να έχει ετοιμάσει ένα φύλλο εργασίας ανά περίπτωση, το οποίο και να επιλέξει να δώσει στην ομάδα των μαθητών. Με διακριτικότητα πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές να πειραματιστούν στο αρχείο παρατηρώντας το σχήμα της πισίνας και τον τρόπο που αλλάζουν οι διαστάσεις όταν η περίμετρός της ή το εμβαδόν της είναι γνωστά.



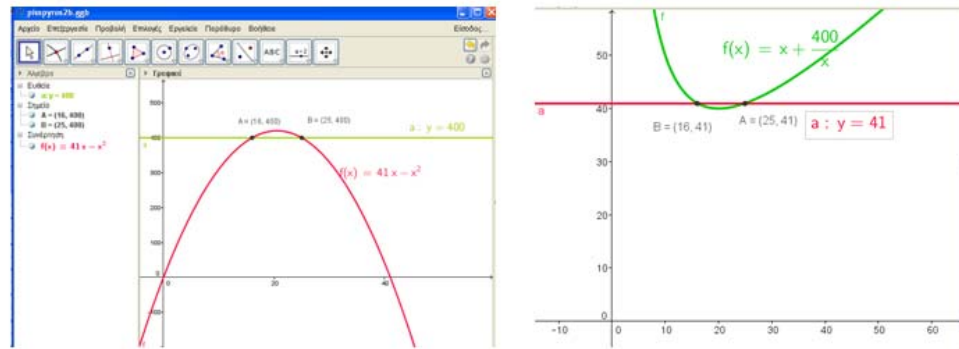
Εικόνα 4

Αναμένονται τα παρακάτω: Οι μαθητές μετατρέπουν τις πληροφορίες της περιμέτρου και του εμβαδού της πισίνας σε μαθηματικές σχέσεις και βρίσκουν: $x+y=41$, $xy=400$. Παροτρύνονται αρχικά να πειραματιστούν σε ένα έτοιμο μοντέλο πισίνας με περίμετρο 82 μέτρων. Αυξομειώνουν τη μία διάσταση και παρατηρούν ότι κάθε φορά αυτό συμπαρασύρει την αλλαγή και της άλλης διάστασης. Αν αυξάνεται το μήκος, το πλάτος μειώνεται και αντίστροφα, αν αυξάνεται το πλάτος μειώνεται το μήκος της. Αναμένεται να το εξηγήσουν από τη σχέση $x+y=41$, όπου x , y το μήκος και το πλάτος της πισίνας. Η γεωμετρική αναπαράσταση της πισίνας, που είναι τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων βοηθά τον μαθητή να παρατηρήσει τις θέσεις της τέταρτης κορυφής, που αλλάζει θέση με πολύ συγκεκριμένο τρόπο στο επίπεδο. Βάζοντας ίχνος παρατηρούν ότι η τέταρτη κορυφή κινείται σε ευθεία και το εξηγούν (εικόνα 4). Σε αυτό το σημείο καλό είναι να αναδειχτεί ότι όταν έχουμε μία πρωτοβάθμια εξίσωση με δύο αγνώστους, οι λύσεις είναι πολλές και πάνω στη γραφική παράσταση της ευθείας. Στην περίπτωση μας δε, είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα της $x+y=41$, λόγω των περιορισμών.



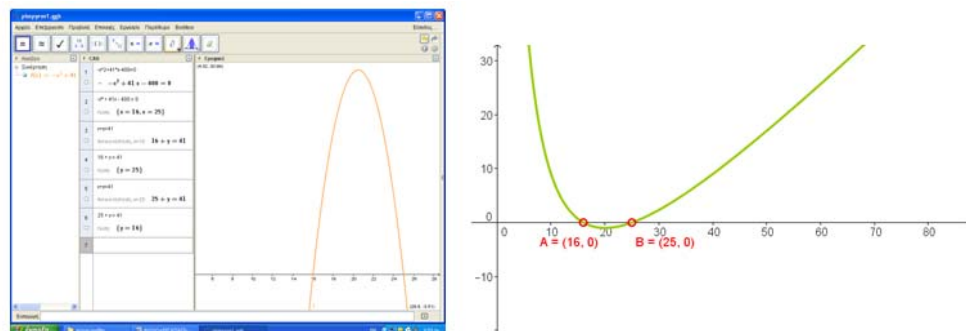
Εικόνα 5

Παρόμοια μπορεί να μελετήσουν τον τρόπο που αυξομειώνονται οι διαστάσεις της πισίνας όταν το εμβαδόν της είναι 400τ.μ. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι όταν αυξάνεται η μία πλευρά, μειώνεται η άλλη με βάση τη σχέση $y=400/x$ ή ότι $xy=400$ οπότε τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα και εξηγούν γιατί η θέση της τέταρτης κορυφής είναι πάνω σε μια υπερβολή ή στην περίπτωση μας πάνω σε ένα μέρος της, λόγω των περιορισμών. Το επιθυμητό είναι οι μαθητές με τους διαδοχικούς πειραματισμούς τους να ανακαλύψουν τα κοινά σημεία της ευθείας $y=41-x$ και της υπερβολής $y=400/x$ και να τα συνδέσουν με το ζητούμενο, οπότε και θα έχουν λύσει γραφικά το σύστημα των εξισώσεων $x+y=41$ και $xy=400$ (εικόνα 5).



Εικόνα 6

Ενδέχεται όμως να λύσουν μία από τις δύο σχέσεις ως προς τη μεταβλητή x και να την αντικαταστήσουν στην άλλη εξίσωση, οπότε να έχουν τις σχέσεις $y=41-x$ και $(41-x)x=400$ ή $y=400/x$ και $x+400/x=41$. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να υποστηρίξει κάθε μία από αυτές τις εκδοχές και να βοηθήσει τους μαθητές να παρατηρήσουν τις γραμμές των γραφικών παραστάσεων που σχεδιάζουν τα ίχνη των σημείων $(x, \text{εμβαδόν}) = (x, (41-x)x)$ ή $(x, \text{ημιπερίμετρος}) = (x, x+400/x)$ αντίστοιχα. Αν ορίσουν ένα από αυτά τα σημεία, βάλουν ίχνος και παρατηρήσουν τότε το σημείο $(x, \text{εμβαδόν})$ τέμνει την ευθεία $y=400$ ή το σημείο $(x, \text{ημιπερίμετρος})$ που τέμνει την ευθεία $y=41$ θα έχουν βρει τη λύση του προβλήματος γραφικά (εικόνα 6).



Εικόνα 7

Αν πάλι συνεχίσουν τις σχέσεις $(41-x)x=400$ ή $x+400/x=41$ θα φτάσουν στη λύση της εξίσωσης $-x^2+41x-400=0$ ή $x+400/x-41=0$ αντίστοιχα. Εδώ έχει ενδιαφέρον να βρουν γραφικά τις λύσεις τους από τις τομές των γραφικών παραστάσεων των καμπύλων με τον άξονα $x'x$ (εικόνα 7) καθώς και να μελετήσουν το μέγιστο-ελάχιστο της συνάρτησης.

Στο τέλος οποιασδήποτε περίπτωσης ζητείται να λυθεί το σύστημα αλγεβρικά σύμφωνα με τις αρχικές σχέσεις και τις προτεινόμενες αντικαταστάσεις, και να προσδιοριστούν οι λύσεις με ακρίβεια. Ας σημειωθεί ότι με τη μέθοδο της αντικατάστασης ανάλογα με την εξίσωση που θα διαλέξουν, οι μαθητές μπορεί να καταλήξουν σε μία εξίσωση β' βαθμού ή σε μία κλασματική και στη συνέχεια σε εξίσωση β' βαθμού.

Γ' Φάση: Την τελευταία διδακτική ώρα οι μαθητές κάθε ομάδας ετοιμάζουν μία σύντομη περιήγηση - παρουσίαση των ευρημάτων τους στις άλλες ομάδες και συζητούν όλοι μαζί τους τρόπους λύσης του προβλήματος είτε γραφικά είτε

αλγεβρικά.

7. Φύλλα Εργασίας

Τα φύλλα εργασίας είναι αναρτημένα στη διεύθυνση: <http://eclass.gunet.gr/modules/document/file.php/TELEGU358/filla%20ergasias%20pisina.rar>

8. Προτάσεις για περαιτέρω δραστηριότητες – προτεινόμενες εργασίες - επέκταση

Μπορεί να δοθεί ως εργασία για τους μαθητές να φτιάξουν ένα δικό τους πρόβλημα και να το δώσουν στους συμμαθητές τους μιας άλλης ομάδας να το λύσουν. Ενδιαφέρον βέβαια έχει να μπουν ερωτήματα για το μέγιστο ή ελάχιστο μιας συνάρτησης καθώς και η αναζήτηση λύσεων μιας ανίσωσης με δύο αγνώστους ή η λύση του συστήματος δύο ανισώσεων.

9. Βιβλιογραφία – Πηγές

Ελισάβετ Καμπάνη: *Η Αλίκη στο σχολείο των προκλήσεων*, εκδοτικός οίκος eAnagnosis

Επιμορφωτικό υλικό Επιμόρφωσης Β' Επιπέδου: Χ. Κυνηγός, Γ. Ψυχάρης, Κ. Γαβρίλης, Σ. Κεϊσογλου.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η γεωμετρική αναπαράσταση της πησίνας, η δυνατότητα αλλαγής των διαστάσεων της με κάποιες προϋποθέσεις και τη χρήση ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας βοηθάει τον μαθητή να αλληλεπιδράσει με το σχήμα. Να παρατηρήσει το ίχνος ενός σημείου του επιπέδου που έχει τετμημένη τη μία της διάσταση και τεταγμένη την άλλη ή την περίμετρο ή το εμβαδόν ή μια ιδιότητα των διαστάσεων της, να το συνδέει με τη γραφική παράσταση συνάρτησης και να ερμηνεύει την τομή της με μία άλλη γραμμή.