

«Η μικρή ιστορία μιας βιώσιμης Ελληνικής επιχείρησης: μια προσέγγιση της ανίσωσης 2^{ου} βαθμού»

Ματοσσιάν Αλμπέρ-Ντικράν¹, Κουτσκουδής Παναγιώτης²

¹ Καθηγητής Μαθηματικών, Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Μυτιλήνης
nalmat@env.aegean.gr

² Καθηγητής Μαθηματικών, Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Μυτιλήνης
pkoutsoudis@yahoo.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εισήγηση αφορά στην παρουσίαση ενός σεναρίου διδασκαλίας που απευθύνεται σε μαθητές της Β' Λυκείου. Το προτεινόμενο θέμα σχετίζεται με την προσέγγιση της ανίσωσης 2^{ου} βαθμού μέσα από το σύστημα μιας παραβολής και μιας ευθείας, και ισοδύναμα μέσα από τη μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, με αφορμή ένα κλασικό πρόβλημα της καθημερινότητας. Για την υλοποίηση αυτής της δραστηριότητας προτείνεται να χρησιμοποιηθεί το λογισμικό Geogebra. Το GeoGebra είναι μια ελεύθερη και πολλών πλατφόρμων εφαρμογή μαθηματικών για όλα τα επίπεδα της εκπαίδευσης, που ενσωματώνει Γεωμετρία, Άλγεβρα, πίνακες, γραφήματα και Λογισμό.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: έσοδα, κόστος, κέρδος, παραβολή, ευθεία, πρόσημο τριωνύμου, συνάρτηση τριωνύμου, γραφική παράσταση

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η θεωρία «κατασκευής της γνώσης» ή «κονστρουκτιβισμός» (constructivism) βασίζεται στην αναπτυξιακή θεωρία του επιστημολόγου Jean Piaget και αποτελεί την πιο σύγχρονη και αποδεκτή θεωρία γύρω από τη μάθηση και τη διδασκαλία (Τουμάσης, 1994). Ο κονστρουκτιβισμός έτσι όπως εφαρμόστηκε στην διδασκαλία των Μαθηματικών, εστίασε σχεδόν αποκλειστικά στις διαδικασίες με τις οποίες οι μαθητές ενεργά θα κατασκευάζουν τη δική τους Μαθηματική πραγματικότητα (Cobb, P., Wood, T. & Yackel, E., 1991). Ο δάσκαλος των μαθηματικών θα πρέπει μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες διδακτικές καταστάσεις να δώσει τη δυνατότητα στο μαθητή να κατασκευάσει τη γνώση. Ο σχεδιασμός αυτός θα πρέπει να βασίζεται πάνω σε ενεργητικές μεθόδους μάθησης όπως είναι το Ανοικτό Πρόβλημα και η Λύση Προβλήματος, να κεντρίζει το ενδιαφέρον του μαθητή και να τον βοηθά να «οπτικοποιήσει» τις υπό διαπραγμάτευση έννοιες και σχέσεις. Έτσι θα ενεργοποιήσει το μαθητή στο να διαμορφώσει μια στάση «ερευνητή»: να κάνει εικασίες και να τις επαληθεύει χρησιμοποιώντας προηγούμενες γνώσεις, να προσπαθήσει να γενικεύσει τα αποτελέσματα των «δοκιμών», να μοντελοποιήσει. Ο δάσκαλος των μαθηματικών, βασιζόμενος στην ευρετική μεθοδολογία του Polya, μπορεί να διαιρέσει το πρόβλημα σε απλούστερα προβλήματα και μέσα από επί μέρους ερωτήσεις να αναδείξει τη δομή του προβλήματος και τη σχέση των μερών με το όλο. Ένα σενάριο μπορεί να λειτουργήσει ως ένας στρατηγικός καταλύτης, που στοχεύει να εμπλέξει τους

συμμετέχοντες σε καινοτόμες δράσεις οι οποίες τους παρέχουν τη δυνατότητα να γνωρίσουν απρόσμενες μαθησιακές καταστάσεις (Κυνηγός, 2007)

Η ανάπτυξη της υπολογιστικής τεχνολογίας μας παρακινεί να τη χρησιμοποιούμε ολοένα και περισσότερο στην εκπαιδευτική διαδικασία. Ειδικά στη διδασκαλία των Μαθηματικών, η χρήση των Η/Υ επιτρέπει στους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες, διευκολύνει τον πειραματισμό και την εξερεύνηση, δημιουργεί θετικές στάσεις απέναντι στα Μαθηματικά, ενισχύει την εποπτεία και, μέσα από την «οπτικοποίησή» τους, βοηθάει στην αποτελεσματικότερη διδασκαλία κάποιων εννοιών (Τουμάσης, 2003). Ένα από τα χαρακτηριστικά του σεναρίου είναι η τεκμηρίωση των λειτουργιών της τεχνολογίας με αποκλειστική έμφαση στους μαθησιακούς στόχους που αφορούν τη διδασκαλία των εμπλεκόμενων μαθηματικών εννοιών. Τα υπολογιστικά εργαλεία δε θεωρείται ότι προάγουν την μάθηση επειδή διαθέτουν κάποια «οντολογικά» χαρακτηριστικά. Αντίθετα, η παιδαγωγική τους αξία καθορίζεται μέσα από τη χρήση τους και στο πλαίσιο συγκεκριμένων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων. Χρειάζεται όμως μια ισορροπημένη χρήση των Η/Υ στη διδασκαλία και στη μάθηση των Μαθηματικών. Ορισμένες δεξιότητες χειρισμού συμβόλων «με μολύβι και χαρτί» είναι σημαντικές για τη μαθησιακή διαδικασία και ισορροπία σημαίνει κατάλληλη δόση του «νοερού» και της σύγχρονης τεχνολογίας σε καθημερινή βάση. Η τεχνολογία μας προσφέρει την ευκαιρία να τραβήξουμε το μάθημα των Μαθηματικών μακριά από την παραδοσιακή ρουτίνα, αναμορφώνοντας το περιεχόμενο και την παιδαγωγική του διάσταση, δίνοντάς του νέα πνοή. Θα είμαστε αδικαιολόγητοι αν δεν την αξιοποιήσουμε (Τουμάσης, 2003).

Το Geogebra ανήκει στην κατηγορία των λογισμικών πολλαπλών αναπαραστάσεων. Είναι ένα ελεύθερο δυναμικό λογισμικό για τη διδασκαλία των μαθηματικών που ενώνει τη γεωμετρία, την άλγεβρα και το λογισμό. Αναπτύχθηκε από τον Markus Hohenwarter στο Florida Atlantic University για τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών στο σχολείο. Το GeoGebra είναι ένα δυναμικό σύστημα γεωμετρίας. Ο χρήστης μπορεί να κάνει κατασκευές με σημεία, διανύσματα, ευθύγραμμα τμήματα, ευθείες, κωνικές τομές καθώς επίσης χρησιμοποιώντας συναρτήσεις και στη συνέχεια να τα τροποποιήσει με ένα δυναμικό τρόπο. Το λογισμικό επιτρέπει, επίσης, την απευθείας εισαγωγή εξισώσεων και συντεταγμένων.

ΑΞΟΝΕΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

- 1. Τίτλος διδακτικού σεναρίου:** Η μικρή ιστορία μιας βιώσιμης Ελληνικής επιχείρησης: μια προσέγγιση της ανίσωσης 2ου βαθμού.
- 2. Εκτιμώμενη διάρκεια διδακτικού σεναρίου:** 2 διδακτικές ώρες
- 3. Ένταξη του διδακτικού σεναρίου στο πρόγραμμα σπουδών/προαπαιτούμενες γνώσεις**

Το σενάριο απευθύνεται στους μαθητές της Α' τάξης του Λυκείου και αναφέρεται στην ενότητα της ανίσωσης 2ου βαθμού.

Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

 - α. Την ερμηνεία των συντεταγμένων ενός σημείου μιας γραφικής παράστασης.
 - β. Τις συναρτήσεις $y = ax^2$, $y = ax + \beta$ και $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ (όπως τις διδάχτηκαν στο Γυμνάσιο)

4. Σκοποί και στόχοι του διδακτικού σεναρίου

Γνωστικοί στόχοι

Οι μαθητές:

- Να μοντελοποιήσουν ένα κλασικό πρόβλημα.
- Να συσχετίσουν τον τύπο της συνάρτησης τη γραφική της παράσταση.
- Να συνδέσουν ισοδύναμες παραστάσεις του προβλήματος του προσήμου ενός τριωνύμου.
- Να συσχετίσουν μια δευτεροβάθμια ανίσωση με τις ρίζες και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του αντίστοιχου τριωνύμου.

Παιδαγωγικοί στόχοι

- Να γενικεύουν τα συμπεράσματά τους.
- Να συσχετίζουν αφηρημένες έννοιες με καθημερινά προβλήματα

Τεχνολογικοί στόχοι

- Να διαδράσουν με το συγκεκριμένο λογισμικό και να εξοικειωθούν με βασικές λειτουργίες του.
- Να εκφέρουν θετική ή αρνητική άποψη ως προς τη βοήθεια των ψηφιακών εργαλείων στη προσέγγιση της συγκεκριμένης διδακτικής ενότητας.

Κοινωνικοί στόχοι

Οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να εργαστούν σε ομάδες έχοντας την ευκαιρία ανταλλαγής των αποτελεσμάτων τους με άλλες ομάδες και άρα ανάπτυξης επικοινωνιακών πρακτικών και επιχειρηματολογίας.

5. Οργάνωση της τάξης - Διδακτικό συμβόλαιο - Χρήση Η.Υ. και γενικά ψηφιακών μέσων για το διδακτικό σενάριο

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών. Το λογισμικό που θα χρησιμοποιηθεί είναι το Geogebra, που είναι ένα DGM λογισμικό με στοιχεία CAS.

Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες ώστε καθοδηγούμενοι από το φύλλο εργασίας, και αξιοποιώντας το δυναμικό χαρακτήρα του ψηφιακού εργαλείου να διερευνήσουν τις διαφορετικές περιπτώσεις-όψεις του προβλήματος, και να συμπληρώνουν τις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας. Επιπλέον συνιστάται στους μαθητές να έχουν και ένα τετράδιο σημειώσεων.

Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές, να ελέγχει τα συμπεράσματά τους και να θέτει προς συζήτηση τα συμπεράσματα καθώς και τις δυσκολίες των ομάδων, που θα είναι χρήσιμα και στη διερεύνηση και των υπολοίπων μαθητών.

6. Περιγραφή και αιτιολόγηση του διδακτικού σεναρίου

A. Η προσέγγιση της ανίσωσης 2^{ου} βαθμού μέσα από το σύστημα μιας παραβολής $y = ax^2$ και μια ευθείας $y = \beta x + \gamma$ και τη μελέτη των σχετικών θέσεων των σημείων τομής των δύο αυτών γραφικών παραστάσεων με την ευθεία $x = x_0$ για τις διάφορες τιμές του x_0 . Η όλη διερεύνηση μπορεί να οπτικοποιηθεί από το λογισμικό Geogebra. Επιπλέον εκμεταλλευόμενοι τις δυνατότητες ενός τέτοιου λογισμικού οι μαθητές μπορούν να μελετήσουν τη μεταβολή του σημείου $(x, ax^2 - \beta x - \gamma)$ και να συμπεράνουν ότι οδηγούνται σε

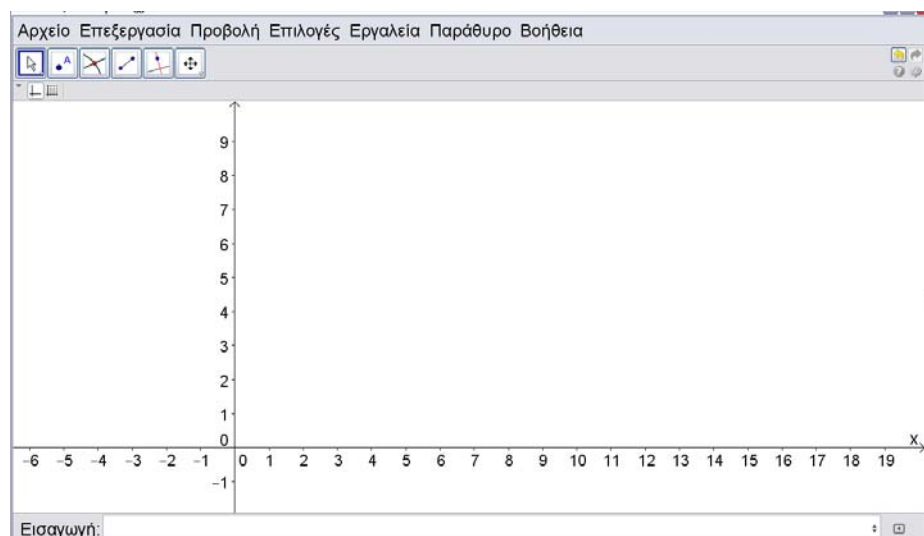
ισοδύναμα συμπεράσματα. Η μελέτη του προσήμου του τριωνύμου, στο σχολικό βιβλίο δίνεται μέσα από τη μετατροπή: $ax^2 + bx + \gamma = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ για τις διάφορες τιμές του Δ . Απουσιάζει οποιαδήποτε σύνδεση με τη συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$, που έχει ήδη διδαχθεί στη Γ' Γυμνασίου, προσεγγίζοντας τη μελέτη αυτή στατικά και μονοδιάστατα αφαιρώντας της τη δυνατότητα αναπαράστασής της μέσω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης του τριωνύμου. Στις προτεινόμενες ασκήσεις του βιβλίου, δεν υπάρχει σύνδεση της συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας με προβλήματα της καθημερινότητας ή με καθημερινές εμπειρίες των μαθητών.

Με το σενάριο αυτό, και με τη δυνατότητα δυναμικής αναπαράστασης των γραφικών παραστάσεων που προσφέρει, οι μαθητές θα μελετήσουν ένα πρόβλημα εσόδων-κόστους, μιας εταιρείας, διερευνώντας πότε η εταιρεία αυτή εμφανίζει κέρδος και πότε ζημία. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα τα έσοδα παριστάνονται από μια καμπύλη της μορφής $f(x) = ax^2$, ενώ το κόστος από μια ευθεία της μορφής $g(x) = bx + \gamma$. Έτσι οδηγούνται στο να διερευνήσουν πότε $f(x) > g(x)$ ή πότε $f(x) < g(x)$ ή ακόμη πότε $f(x) = g(x)$, ερμηνεύοντας την κάθε περίπτωση σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα. Επίσης τους ζητείται να μελετήσουν τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ και το πότε αυτή παίρνει θετικές ή αρνητικές τιμές αντιστοιχίζοντας την κάθε περίπτωση με τα δεδομένα του προβλήματος. Τέλος να συσχετίσουν τις δύο προσεγγίσεις.

Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις της ανίσωσης 2^{ου} βαθμού μέσω των συναρτησιακών προσεγγίσεων της στο μαθησιακό περιβάλλον που θα υλοποιηθούν οι δραστηριότητες, είναι δυναμικά συνδεδεμένες και η μετάβαση από τη μια στην άλλη γίνεται μέσα από τη δυνατότητα αλληλεπίδρασης με τα ψηφιακά εργαλεία.

Β. Ο διδάσκων θα πρέπει να έχει ετοιμάσει ένα αρχείο λογισμικού, με απλουστευμένο μενού εργαλείων (να εμφανίζονται μόνο αυτά που θα χρειαστούν κατά την εκτέλεση του σεναρίου), ώστε ακόμη και οι μαθητές με μικρό βαθμό εξοικείωσης να μπορούν να εκτελέσουν τους απαραίτητες χειρισμούς και να απαντήσουν στα ερωτήματα του φύλλου εργασίας.

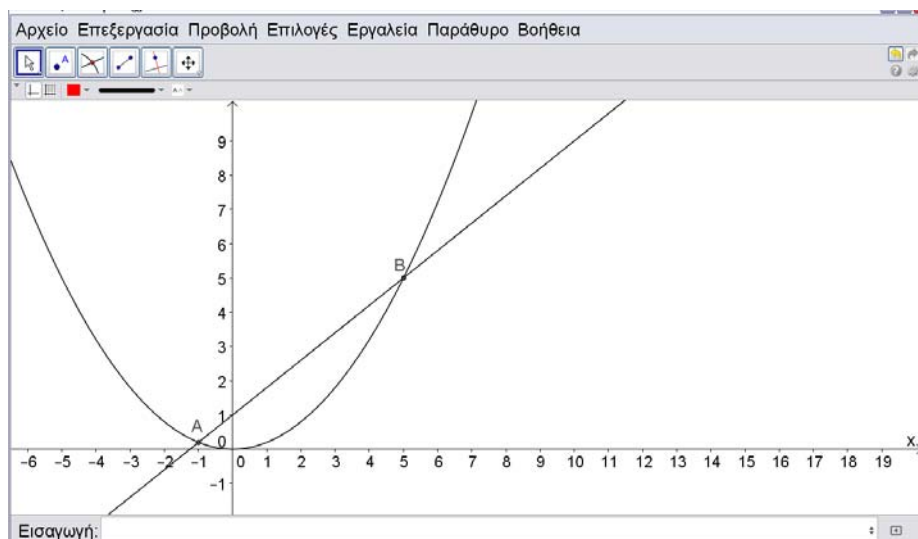
Το αρχείο όπως προτείνεται:



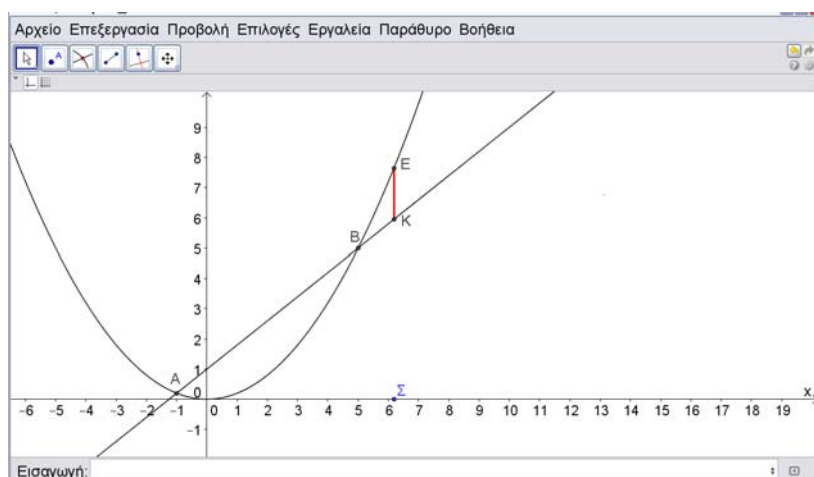
1η φάση:

Δίνεται στους μαθητές στο φύλλο εργασίας το εξής πρόβλημα: «Το κόστος μιας επιχείρησης που παράγει x μονάδες ενός προϊόντος δίνεται από τον τύπο $0,8x+1$ σε χιλιάδες ευρώ. Τα έσοδα σε χιλιάδες ευρώ από την πώληση μιας μονάδας δίνονται από τον τύπο $0,2x$.»

Ζητείται από τους μαθητές να γράψουν τους τύπους των συναρτήσεων των Εσόδων $E(x)$ και του κόστους $K(x)$, να τους πληκτρολογήσουν στο πεδίο εισαγωγής για να εμφανίσουν τις γραφικές παραστάσεις τους, να βρουν τα σημεία τομής και να τα ερμηνεύσουν σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος.

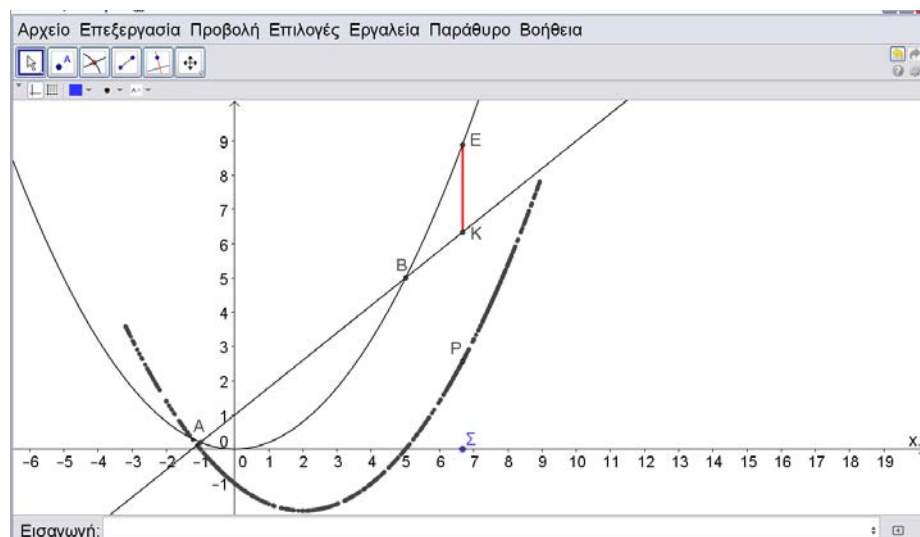
2η φάση:

Ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα σημείο Σ που να κινείται πάνω στον άξονα $x'x$, να φέρουν την κάθετο στον άξονα στο σημείο αυτό και να βρουν τα σημεία τομής E και K της καθέτου αυτής με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $E(x)$ και $K(x)$ αντίστοιχα, και να σχεδιάσουν το ευθύγραμμο τμήμα EK . Στη συνέχεια κινώντας το σημείο Σ να ερμηνεύσουν σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, τις σχετικές θέσεις των σημείων καθώς το αντίστοιχο μήκος του EK . Τέλος ζητείται από τους μαθητές να προσδιορίσουν τους περιορισμούς για την ανεξάρτητη μεταβλητή x που υπαγορεύονται από τη φύση του προβλήματος.



3η φάση:

Ζητείται από τους μαθητές να πληκτρολογήσουν στο πεδίο εισαγωγής $P = (x(\Sigma), y(E)-y(K))$, ώστε να δημιουργήσουν ένα σημείο P (με $x(\Sigma)$ συμβολίζουμε την τετμημένη του σημείου Σ και $y(E), y(K)$ τις τεταγμένες των σημείων E και K αντίστοιχα). Στη συνέχεια να βρουν σε τι αντιστοιχούν οι συντεταγμένες του σημείου P , σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος. Ακολούθως θα πρέπει οι μαθητές να ενεργοποιήσουν το ίχνος του σημείου P και κουνώντας το Σ να εικάσουν για τον τύπο της καμπύλης που διαγράφει και να την ερμηνεύσουν ποιοτικά.

4η φάση:

Ζητείται από τους μαθητές να βρουν τη σχέση μεταξύ των σημείων A και B και εκείνων που το σημείο P συναντά τον άξονα $x'x$, και στη συνέχεια να συσχετίσουν τα αποτελέσματα των δύο προηγούμενων δραστηριοτήτων.

Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή

Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου:

Μετά την υλοποίηση του σεναρίου ο διδάσκων ελέγχει κατά πόσο επετεύχθησαν οι στόχοι του σεναρίου. Ένας τρόπος είναι η κατασκευή κατάλληλων ερωτήσεων τις οποίες στο τέλος θα απευθύνει προς τους μαθητές για να ελέγξει τον βαθμό κατανόησης των εννοιών που είχαν εμπλακεί σε πρώτο βαθμό καθώς και την δυνατότητα επέκτασης περαιτέρω των εννοιών αυτών.

Ως προς τα εργαλεία:

Η εφαρμογή μέσα σε πραγματικές συνθήκες της δραστηριότητας παρουσιάζει μη αναμενόμενες δυσκολίες οι οποίες μπορεί να οφείλονται στο εργαλείο που χρησιμοποιείται. Οι δυσκολίες που θα παρουσιαστούν θα καταγραφούν από το διδάσκοντα ο οποίος είτε θα βελτιώσει τις απαιτήσεις του σεναρίου είτε θα σχεδιάσει μια περισσότερο κατευθυνόμενη πορεία εφαρμογής του ίδιου σεναρίου.

Ως προς τη διαδικασία υλοποίησης:

Ο διδάσκων μπορεί να κρατά σημειώσεις για τις δυσκολίες υλοποίησης συγκεκριμένων δραστηριοτήτων, ώστε να εντοπίσει τα σημεία στα οποία οι

μαθητές εκδήλωναν δυσκολίες κατανόησης ή εφαρμογής. Στην συνέχεια, επεμβαίνοντας κατάλληλα απλοποιεί περισσότερο τις διαδικασίες ή/και περιγράφει με μεγαλύτερη σαφήνεια τις ερωτήσεις των δραστηριοτήτων.

Ως προς την προσαρμογή και την επεκτασιμότητα::

Ο διδάσκων μετά από κάθε εφαρμογή του σεναρίου επανεκτιμά τη δομή του σεναρίου και σχεδιάζει νέες δυνατότητες και επεκτάσεις. Για παράδειγμα, να διερευνηθούν οι περιπτώσεις στις οποίες το τριώνυμο έχει σταθερό πρόσημο θετικό ή αρνητικό ($\Delta < 0$ και $\Delta = 0$)

7. Φύλλα Εργασίας

Το πρόβλημα:

Το κόστος μιας επιχείρησης που παράγει x μονάδες ενός προϊόντος δίνεται από τον τύπο $0,8x + 1$ σε χιλιάδες ευρώ. Τα έσοδα σε χιλιάδες ευρώ από την πώληση μιας μονάδας δίνονται από τον τύπο $0,2x$.

Δραστηριότητα 1η

Γράψτε εδώ τους τύπους των συναρτήσεων κόστους $K(x)$ και εσόδων $E(x)$.

Να ανοίξετε το αρχείο «ανίσωση 2ου βαθμού.ggb» και να πληκτρολογήσετε στο πεδίο εισαγωγής (στο κάτω μέρος του παραθύρου) τους τύπους των συναρτήσεων εσόδων $E(x)$ και κόστους $K(x)$. (**Υπόδειξη:** χρησιμοποιείτε το $*$ για πολλαπλασιασμό και το $^$ για να υψώσετε σε δύναμη)

- i. Ποιες είναι οι συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου της για καθεμία από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $E(x)$ και $K(x)$.
- ii. Να ερμηνεύσετε τι σημαίνουν οι συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου της γραφικής παράστασης της $E(x)$ και τι ενός σημείου της $K(x)$, στο πρόβλημά μας.

Με το εργαλείο τομής δύο αντικειμένων  να βρείτε την τομή των δύο γραφικών παραστάσεων.

- iii. Να ερμηνεύσετε τι παριστάνουν τα σημεία τομής στο πρόβλημά μας.

Γράψτε εδώ τις απαντήσεις σας.

Δραστηριότητα 2η

Πάρτε ένα τυχαίο σημείο Σ πάνω στον άξονα xx' και φέρτε την κάθετη σ' αυτόν στο σημείο Σ , με τη βοήθεια του εργαλείου . (**Υπόδειξη:** πατώντας δεξιά «κλικ» πάνω σε ένα αντικείμενο και επιλέγοντας «Μετονομασία» μπορείτε να αλλάξετε το όνομα του αντικειμένου)

Βρείτε τα σημεία τομής της καθέτου με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $K(x)$, $E(x)$ και ονομάστε τα K , E αντίστοιχα. Πατήστε «δεξιά κλικ» πάνω στο καθένα από τα σημεία Σ , K , E και από τις «Ιδιότητες», επιλέξτε «Δείξε την Ετικέτα»/«Όνομα & Τιμή» Πατήστε «δεξιά κλικ» πάνω στην ευθεία και αποεπιλέξτε το «Δείξε το αντικείμενο».

Μετακινήστε το σημείο Σ κατά μήκος του άξονα $x'x$.

- i. Συμπληρώστε τον πίνακα

x	6	5	3	0	-2
E(x)					
K(x)					

- ii. Για ποιες θέσεις του x το K βρίσκεται ψηλότερα του E και για ποιες τιμές του x ισχύει το αντίστροφο;
- iii. Τι σημαίνει για την επιχείρηση το γεγονός το E να βρίσκεται ψηλότερα του K ή αντίστροφα;
- iv. Ποια είναι η ανισωτική σχέση συνδέει τις τεταγμένες των σημείων K και E σε κάθε περίπτωση;

Γράψτε εδώ τις απαντήσεις σας.

Με τη βοήθεια του κουμπιού  σχεδιάστε το ευθύγραμμο τμήμα EK . Πατήστε «δεξί κλικ» πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα από τις «Ιδιότητες», επιλέξτε «Δείξε την Ετικέτα»/«Τιμή». Μετακινώντας το σημείο Σ το μήκος του EK μεταβάλλεται.

- v. Συμπληρώστε τον πίνακα

x	6	5	3	0	-2
E(x) – K(x)					

- vi. Να ερμηνεύσετε τι παριστάνει η διαφορά $E(x) - K(x)$ και πώς αυτή σχετίζεται με το μήκος του EK στο πρόβλημά μας.
- vii. Μετακινώντας το σημείο Σ μπορείτε να συμπεράνετε πότε η επιχείρηση έχει κέρδος και πότε έχει ζημία;

Γράψτε εδώ τις απαντήσεις σας.

- viii. Τι σημαίνει η τιμή $x = -2$ για το συγκεκριμένο πρόβλημα; Έχει νόημα η τοποθέτηση του Σ στον αρνητικό ημιάξονα; Τι περιορισμοί για το x προκύπτουν από τη φύση του προβλήματος; Ποιο κομμάτι των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $E(x)$ και $K(x)$ εκφράζει τις μεταβολές των εσόδων και του κόστους αντίστοιχα;

Γράψτε εδώ τις απαντήσεις σας.

Δραστηριότητα 3η

Πληκτρολογώντας στο πεδίο εισαγωγής $P = (x(\Sigma), y(E)-y(K))$ δημιουργείται ένα σημείο P (με $x(\Sigma)$ συμβολίζουμε την τετμημένη του σημείου Σ και $y(E), y(K)$ τις τεταγμένες των σημείων E και K αντίστοιχα).

- i. Τι εκφράζει, για την επιχείρηση, η τετμημένη και τι η τεταγμένη του σημείου P ; Με δεξί «κλικ» στο σημείο P , επιλέξτε «Ίχνος ενεργό». Μετακινείστε το σημείο Σ και εξηγήστε τη γραφική παράσταση ποιας συνάρτησης του προβλήματός μας, διαγράφει το ίχνος του σημείου P .

- ii. Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης $\pi(x)$ της οποίας τη γραφική παράσταση διαγράφει το σημείο P ;

- iii. Σε πόσα σημεία συναντά το P τον άξονα $x'x$; Βρείτε αλγεβρικά τις τετμημένες των σημείων αυτών.
- iv. Πότε η συνάρτηση $\pi(x)$ γίνεται αρνητική και πότε θετική;

Γράψτε εδώ τις απαντήσεις σας.

Δραστηριότητα 4η

- i. Πώς σχετίζονται τα σημεία τομής A και B των συναρτήσεων $E(x)$ και $K(x)$ με τα σημεία που το σημείο P συναντά τον $x'x$;
- ii. Συσχετίστε τα συμπεράσματα που προέκυψαν στις Δραστηριότητες 2 και 3. Καταλήγουμε σε ισοδύναμα συμπεράσματα;

Γράψτε εδώ τις απαντήσεις σας.

8. Προτάσεις για περαιτέρω δραστηριότητες – προτεινόμενες εργασίες - επέκταση

Να διερευνηθούν οι περιπτώσεις στις οποίες το τριώνυμο έχει σταθερό πρόσημο θετικό ή αρνητικό ($\Delta < 0$ και $\Delta = 0$), και με τις δύο προσεγγίσεις, δηλαδή αυτής του συστήματος παραβολής-ευθείας και αυτής της συνάρτησης του τριωνύμου.

9. Βιβλιογραφία – Πηγές

Cobb, P., Wood, T. & Yackel, E. (1991) *A Constructivist Approach to Second Grade Mathematics* in von Glasersfeld (Ed) *Radical Constructivism in Mathematics Education*, DordrechtKluwer.

Polya G. (1991). *Πως θα το λύσω*, Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.

Κυνηγός Χ. (2003). *Το Μάθημα της Διερεύνησης, Παιδαγωγική Αξιοποίηση των Ψηφιακών Τεχνολογιών για τη Διδακτική των Μαθηματικών*, Εκδ. Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα

Τουμάσης Μ. (1992). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*, Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Τουμάσης Μ. (2003). *Διδασκαλία Μαθηματικών με χρήση Η/Υ*, Αθήνα: Εκδόσεις Σαββάλα.

Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης, Τεύχος 4, Κλάδος ΠΕ03, Β' Έκδοση, ΕΑΙΤΥ – Τομέας Επιμόρφωσης και Κατάρτισης

<http://www.geogebra.org>

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το συγκεκριμένο σενάριο βοηθά τον μαθητή να αντιμετωπίσει την εξίσωση 2^{ου} βαθμού, την ανίσωση 2^{ου} βαθμού και την μελέτη της συνάρτησης $y = ax^2 + bx + \gamma$, σαν ενιαία ενότητα και μέσα στο εμπειρικό πλαίσιο του μαθητή και όχι αποσπασματικά και κατακερματισμένα..