

## «Χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού για τη διδασκαλία του θεωρήματος του Bolzano»

Ιορδανίδης Ι. Φώτιος

Καθηγητής Μαθηματικών, 2<sup>ο</sup> Γενικό Λύκειο Πτολεμαΐδας

[fjordaneap@gmail.com](mailto:fjordaneap@gmail.com)

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το θεώρημα του Bolzano είναι το πρώτο ουσιαστικά θεώρημα που συναντάνε οι μαθητές στην Ανάλυση. Κατά τη διδασκαλία του θεωρήματος, θα πρέπει να δοθούν και να συζητηθούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που πληρούν τις προϋποθέσεις του, ώστε οι μαθητές να βοηθηθούν στην ουσιαστική κατανόησή του. Είναι καλό να αναφερθεί η αναγκαιότητα των υποθέσεων του θεωρήματος και να τονισθεί, με κατάλληλα παραδείγματα, ότι δεν ισχύει το αντίστροφο. Δίνοντας στους μαθητές κατάλληλες συναρτήσεις ή προτρέποντάς του να σχεδιάσουν δικές τους, μπορούν να διαπιστώσουν και τις συνέπειες του θεωρήματος, όπως για παράδειγμα την διατήρηση προσήμου συνάρτησης και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών και μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

**ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ:** θεώρημα Bolzano, προϋποθέσεις θεωρήματος, αντίστροφο θεωρήματος, συνέπειες θεωρήματος Bolzano

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι προϋποθέσεις και το συμπέρασμα το θεωρήματος του Bolzano, μπορεί να οπτικοποιηθεί και να γίνει δυναμική αν η διδασκαλία υποστηριχθεί από κατάλληλο λογισμικό. Οι μαθητές θα μπορέσουν να αναγνωρίσουν την συνέχεια και τις ρίζες μιας συνάρτησης, να σχεδιάσουν γραφικές παραστάσεις και να ελέγξουν την εφαρμογή ή μη του θεωρήματος, να εντοπίσουν το πλήθος των ριζών μιας συνάρτησης, καθώς επίσης και το σύνολο τιμών της και να διατυπώσουν τις συνέπειες του θεωρήματος.

### ΑΞΟΝΕΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

1. **Τίτλος διδακτικού σεναρίου:** Χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού (Geogebra) για τη διδασκαλία του θεωρήματος Bolzano.
2. **Εκτιμώμενη διάρκεια διδακτικού σεναρίου:** 2 ώρες
3. **Ένταξη του διδακτικού σεναρίου στο πρόγραμμα σπουδών/προαπαιτούμενες γνώσεις**

Ως προς τα μαθηματικά οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

- Την έννοια της συνέχειας.
- Την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Bolzano .
- Τον υπολογισμό ορίων.
- Την εύρεση (γραφικά) πεδίου ορισμού και συνόλου τιμών.

Ως προς την τεχνολογία οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν να χειρίζονται τις βασικές λειτουργίες του προγράμματος geogebra.

Γνωστικά – διδακτικά προβλήματα:

Εάν επιχειρήσουμε να συνοψίσουμε τις δυσκολίες που παρουσιάζονται στην διδασκαλία της συγκεκριμένης παραγράφου θα έπρεπε να εστιάσουμε στο πρόβλημα της νοηματοδότησης των αλγεβρικών συμβόλων, των αλγεβρικών εκφράσεων και των μετασχηματισμών που οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν. Η Άλγεβρα, μέσα στο τρέχον αναλυτικό πρόγραμμα του σχολείου και τα εγχειρίδια, προβάλλεται ως μια γενίκευση της αριθμητικής και από το σημείο αυτό εμφανίζονται και οι πρώτες δυσκολίες. Στο χώρο της Άλγεβρας τα αντικείμενα είναι γενικευμένοι αριθμοί και οι σχέσεις είναι σχέσεις μεταξύ γενικευμένων αριθμών ή αλλιώς, ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζουν οι τιμές που μπορεί να πάρει ένας γενικευμένος αριθμός σε σχέση με κάποιον άλλο.

Έχει θεωρηθεί ότι ένας τρόπος υπέρβασης της δυσκολίας κατανόησης των αλγεβρικών συμβόλων και παραστάσεων είναι η επίλυση λεκτικών προβλημάτων η οποία συνδέει τον αλγεβρικό συμβολισμό με πραγματικές καταστάσεις. Φαίνεται ότι η επίλυση προβλημάτων δεν έχει αποδώσει τα επιδιωκόμενα αποτελέσματα αφού παρατηρήθηκε το φαινόμενο οι μαθητές να περιορίζονται σε αποστήθιση κανόνων και μεθόδων αντιμετώπισης των προβλημάτων χωρίς να κατανοούν τις έννοιες που χρησιμοποιούν.

Η χρήση του τετραδίου και του πίνακα στην αναπαράσταση των αλγεβρικών εννοιών απαιτεί ιδιαίτερες νοητικές και αφαιρετικές δεξιότητες καθώς τα συγκεκριμένα στατικά μέσα δεν διαθέτουν διαδραστικά χαρακτηριστικά δηλαδή δεν αντιδρούν στις ενέργειες του μαθητή. (ITY, 2010)

#### **4. Σκοποί και στόχοι του διδακτικού σεναρίου**

Οι δραστηριότητες που περιγράφονται στη συνέχεια έχουν ως στόχο την μέσω πειραματισμού σύνδεση και κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών και συγκεκριμένα:

Να μπορούν να αναγνωρίζουν τόσο εποπτικά όσο και αλγεβρικά:

- Μια συνεχή συνάρτηση.
- Τις τιμές μιας συνάρτησης στα άκρα ενός διαστήματος.
- Την ύπαρξη ρίζας ή ριζών.
- Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης.
- Την ασυνέχεια μιας συνάρτησης.
- Την μονοτονία
- Τον ορισμό της «1-1» συνάρτησης.
- Τον ορισμό των ακροτάτων.

Τα παραπάνω αφορούν του γνωστικούς στόχους. Οι κοινωνικοί στόχοι για τους μαθητές εντοπίζονται κυρίως στη συνεργασία.

#### **5. Οργάνωση της τάξης - Διδακτικό συμβόλαιο - Χρήση Η.Υ. και γενικά ψηφιακών μέσων για το διδακτικό σενάριο**

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών. Ο πειραματισμός με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού (Geogebra) απαιτεί πάνω απ' όλα εργαστήριο με 9 τουλάχιστον θέσεις, ώστε να μπορούν να εργασθούν οι μαθητές ανά δύο ή τρεις. Καλό θα είναι να

υπάρχει και βιντεοπροβολέας προκειμένου ο διδάσκων να ενημερώνει – καθοδηγεί τους μαθητές, όπως επίσης και να συζητάει δημόσια απορίες που προκύπτουν από αυτούς. Η επιλογή από τον διδάσκοντα να το υλοποιήσει στην αίθουσα διδασκαλίας με τη χρήση βιντεοπροβολέα θα ακύρωνε το μεγαλύτερο μέρος της προστιθέμενης αξίας.

Κάθε ομάδα είναι σκόπιμο να διαθέτει φύλλα εργασίας μέσα στα οποία θα έχουμε θέσει συγκεκριμένα ερωτήματα και οδηγίες. Επιπλέον καλό θα είναι οι μαθητές να διαθέτουν ένα τετράδιο σημειώσεων.

Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες και καθοδηγούμενοι από το φύλλο εργασίας, καλούνται να επινοήσουν τρόπους αξιοποίησης του ψηφιακού εργαλείου το οποίο διαθέτουν. Επομένως, η διερεύνηση αυτή θα γίνει συνεργατικά. Για να υπάρχει κοινός στόχος και καλή συνεργασία οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα κοινό φύλλο εργασίας που περιέχει ερωτήσεις σχετικές με το θέμα. Φυσικά το φύλλο εργασίας θα πρέπει να αφήνει μια αρκετά μεγάλη ελευθερία στους μαθητές ώστε να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα και να απαντούν σε αυτά.

Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

## 6. Περιγραφή και αιτιολόγηση του διδακτικού σεναρίου

Ανάλυση του σεναρίου

*Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων*

Ο διδάσκων θα πρέπει να έχει ετοιμάσει τέσσερα αρχεία λογισμικού με κατάλληλα κουτιά επιλογής εμφάνισης – απόκρυψης αντικειμένου και δρομείς, ώστε οι μαθητές να επικεντρωθούν περισσότερο στην διερεύνηση και λιγότερο στις τεχνικές κατασκευής των εργαλείων του προγράμματος.

Οι δραστηριότητες του σεναρίου θα πραγματοποιηθούν σε δύο φάσεις.

### 1η φάση

Στην αρχή ο εκπαιδευτικός δίνει το 1<sup>ο</sup> φύλλο εργασίας και ζητά από τους μαθητές να ανοίξουν τα αρχεία Bolz\_7.ggb, στο οποίο παρουσιάζεται η άσκηση 7 του σχολικού βιβλίου. Συμπληρώνοντας οι μαθητές το πλαίσιο κειμένου – εισαγωγής με τους τύπους των συναρτήσεων που παρουσιάζονται στην εκφώνηση της άσκησης, μπορούν να διαπιστώσουν αν οι συναρτήσεις είναι συνεχείς ή όχι. Μετακινώντας τον δρομέα  $a$ , μπορούν να ελέγξουν το διάστημα μελέτης, και να αναγνωρίσουν την αναγκαιότητα των δύο προϋποθέσεων του θεωρήματος.

Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές να σημειώσουν τις απαντήσεις τους (για τις τιμές του  $a$ ) και συζητούνται οι περιπτώσεις λάθος αποτελεσμάτων ή δύο τιμών του  $a$  αντί για μία.

Προκειμένου να εξασκηθούν στην διατύπωση της απάντησης σε αντίστοιχες ασκήσεις, δίνεται και η άσκηση 6 του σχολικού βιβλίου με κατάλληλες ερωτήσεις συμπλήρωσης. Για να μπορέσουν να διαπιστώσουν το συμπέρασμά τους γραφικά, ζητείται να ανοίξουν το αρχείο Bolz\_6.ggb. Στο αρχείο έχει δημιουργηθεί η γραφική παράσταση μιας οικογένειας συναρτήσεων, η οποία με κατάλληλη επιλογή στις τιμές των δρομέων εμφανίζει την αντίστοιχη συνάρτηση της άσκησης. Ζητείται λοιπόν από τους μαθητές να δώσουν τις

κατάλληλες τιμές στους δρομείς, καθώς επίσης και να επιλέξουν τα κουτιά εμφάνισης- απόκρυψης για να επιβεβαιώσουν τα αποτελέσματά τους.

Έτσι οι μαθητές έχουν μια πρώτη γεύση οπτικοποίησης των συνθηκών και του συμπεράσματος του θεωρήματος. Με κατάλληλες ερωτήσεις – παροτρύνσεις ωθεί του μαθητές να πειραματιστούν, να αναγνωρίζουν και διαπιστώνουν τις εκφράσεις «τουλάχιστον μια ρίζα», «ακριβώς μια ρίζα». Υπολογίζουν το πλήθος των ριζών μιας συνάρτησης, εξηγούν την έννοια του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών, της μονοτονίας και της «1-1» συνάρτησης.

## 2η φάση

Στο 2<sup>ο</sup> φύλλο εργασίας και στο αρχείο Bolz\_6.ggb ζητείται από τους μαθητές να δώσουν συγκεκριμένες τιμές στους δρομείς κ και λ, ώστε να διαπιστώσουν την αναγκαιότητα και των δύο προϋποθέσεων του θεωρήματος, καθώς επίσης ότι το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.

Τέλος ζητείται από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο Bolzano με όρια.ggb όπου μελετάται η περίπτωση που δεν δίνεται διάστημα εφαρμογής του θεωρήματος και με κατάλληλες ερωτήσεις, οι μαθητές μπορούν να επαληθεύσουν γραφικά, το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης, τα ακρότατα, το πρόσημο των τιμών μιας συνάρτησης με τη βοήθεια των ορίων και να γίνει μια πρώτη αναφορά στο θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

## 7. Φύλλα Εργασίας

### 1<sup>ο</sup> φύλλο εργασίας

#### Άσκηση 7, Α' ομάδας σχολικού βιβλίου σελ. 198

Για κάθε μια από τις παρακάτω πολυωνυμικές συναρτήσεις f, να βρείτε έναν ακέραιο α τέτοιον, ώστε στο διάστημα (α, α+1) η εξίσωση  $f(x) = 0$  να έχει μία τουλάχιστον ρίζα

i)  $f(x) = x^3 + x - 1$

ii)  $f(x) = x^5 + 2x + 1$

iii)  $f(x) = x^4 + 2x - 4$

iv)  $f(x) = -x^3 + x + 2$

- Ανοίξτε το αρχείο Bolz\_7.ggb
- Στην περιοχή «Γραφικά» εμφανίζεται η εκφώνηση της άσκησης, ένα πλαίσιο κειμένου – εισαγωγής καθώς επίσης και ο «δρομέας» α.
- Στο πλαίσιο κειμένου γράψτε την πρώτη συνάρτηση (i) της άσκησης. Θυμηθείτε, προκειμένου να γράψουμε δύναμη χρησιμοποιούμε το σύμβολο  $\wedge$  π.χ.  $x^3 \rightarrow x^{\wedge}3$ .
- Μετακινήστε, κατάλληλα, τον δρομέα α, ώστε να ικανοποιηθεί η δεύτερη συνθήκη του θεωρήματος. Η συνέχεια των συναρτήσεων είναι δεδομένη αφού όλες είναι πολυωνυμικές.
- Σημειώστε την σωστή απάντηση και συνεχίστε με τον ίδιο τρόπο για τις υπόλοιπες συναρτήσεις.
- Δώστε τις απαντήσεις σας παρακάτω:
 

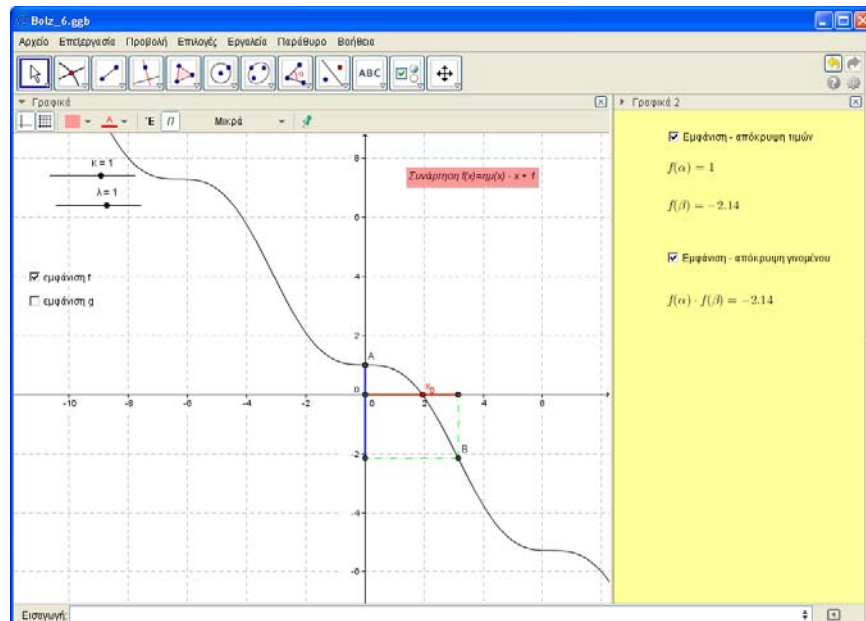
|      |          |     |          |
|------|----------|-----|----------|
| i)   | α= ..... | ii) | α= ..... |
| iii) | α= ..... | iv) | α= ..... |

#### Άσκηση 6, Α' ομάδας σχολικού βιβλίου σελ. 198

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\eta\mu x - x + 1 = 0$  έχει μία τουλάχιστον λύση στο (0, π)

- Ας λύσουμε την άσκηση: Θεωρούμε την συνάρτηση

$f(x) = \dots\dots\dots$



Εικόνα 1: Άσκηση 6

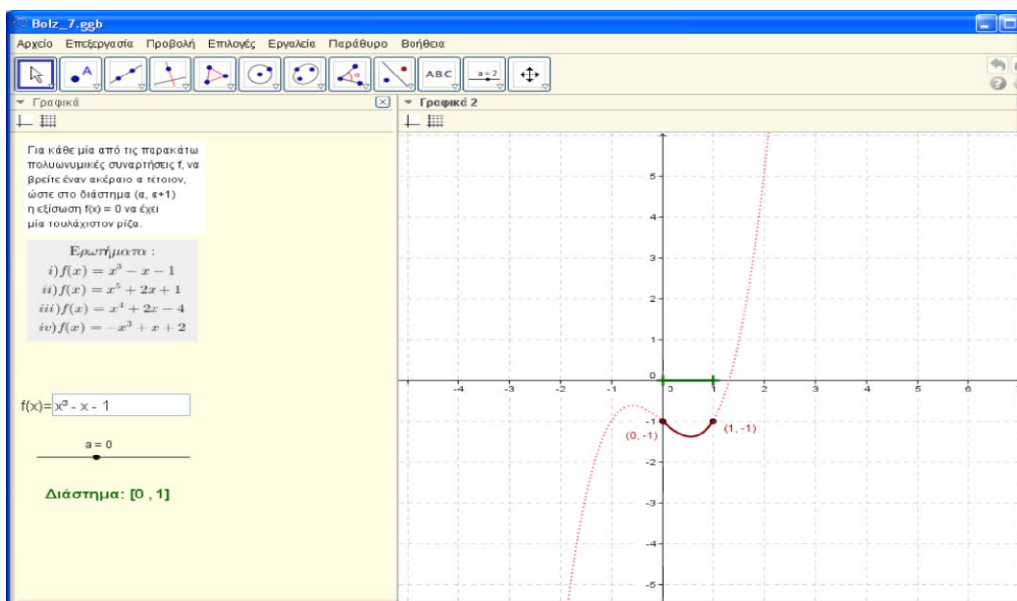
ο Η  $f$  είναι συνεχής στο ..... ως .....

ο  $f(\dots) = \dots$  και  $f(\dots) = \dots$

άρα  $f(\dots) \cdot f(\dots) \dots 0$

οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα ..... τέτοιο, ώστε ..... Δηλαδή ..... οπότε η εξίσωση ..... έχει ..... Στο .....

- Ανοίξτε το αρχείο Bolz\_6.ggb
- Επιλέξτε το κουτί επιλογής εμφάνισης της  $f$ .
- Μετακινήστε τους δρομείς  $\kappa$  και  $\lambda$ , έτσι ώστε να πάρουν και οι δύο την τιμή 1. Παρατηρείστε (στο πλαίσιο κειμένου) ότι δημιουργείτε η συνάρτηση της εκφώνησης.
- Παρατηρείστε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα  $x'$ .
- Στην περιοχή «Γραφικά 2» επιλέξτε το κουτί επιλογής εμφάνισης απόκρυψης τιμών. Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματά σας.

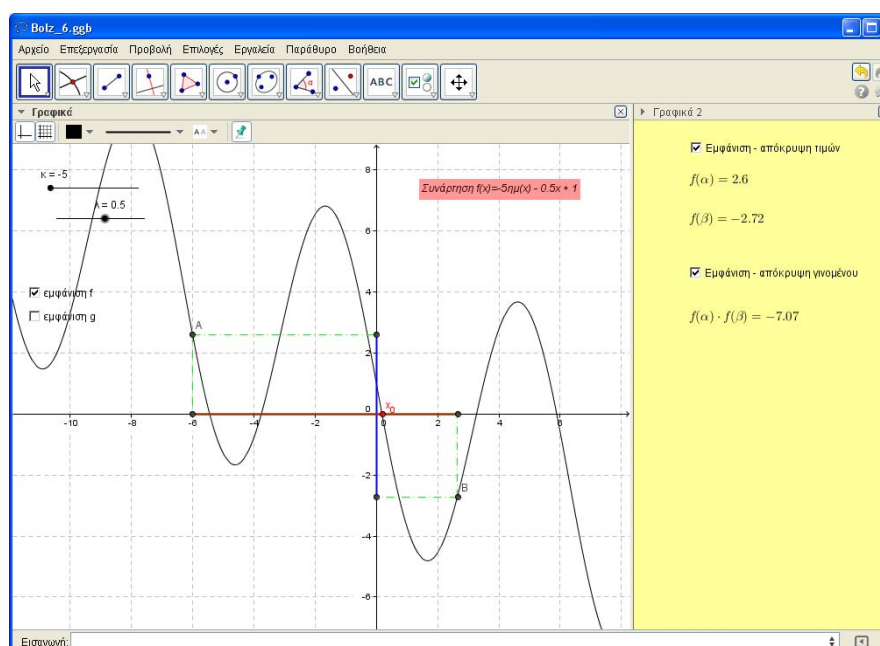


Εικόνα 2: Άσκηση 6, απάντηση ερωτημάτων

- Επιλέξτε το κουτί επιλογής εμφάνισης απόκρυψης γινομένου. Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα σας.

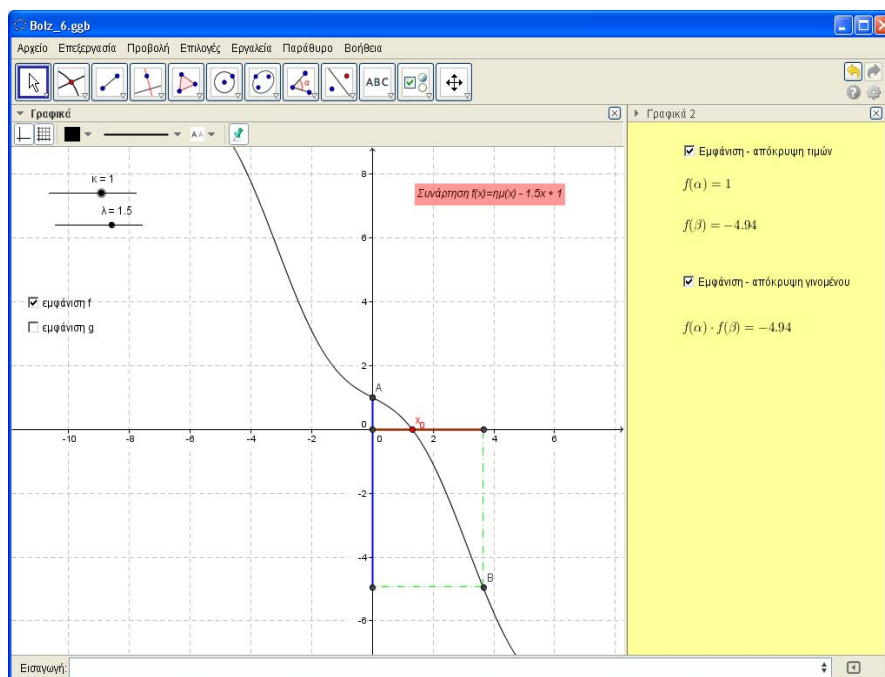
### Παραλλαγές της άσκησης

- Μετακινείτε τους δρομείς **κ** και **λ**, έτσι ώστε να πάρουν τις τιμές **-5** και **0.5** αντίστοιχα.



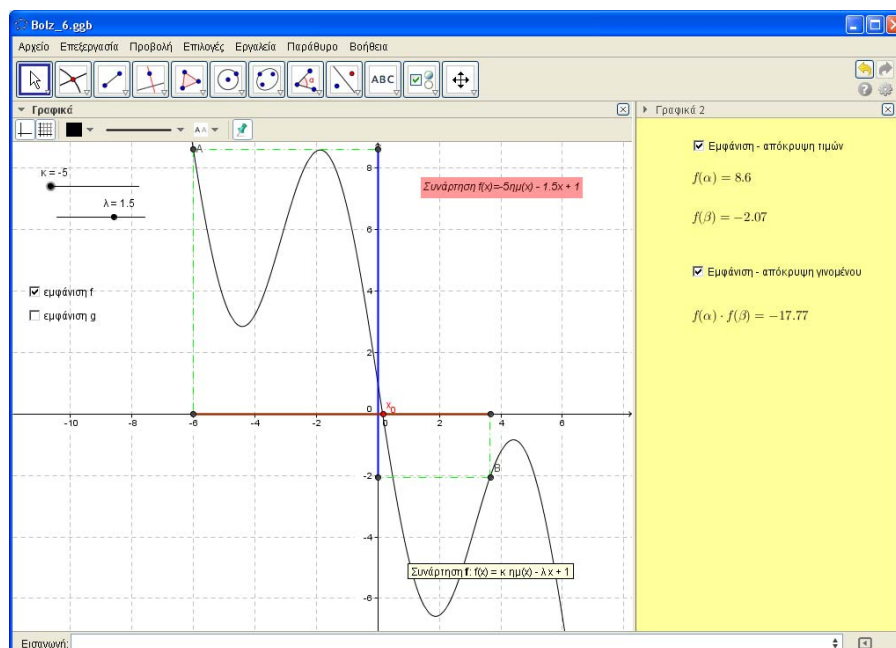
Εικόνα 3: Παραλλαγή της άσκησης

- Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση που δημιουργήσαμε τέμνει το άξονα x'x σε περισσότερα του ενός σημεία (και όχι μόνο στο διάστημα μελέτης).
- Μετακινείτε τους δρομείς **κ** και **λ**, έτσι ώστε να πάρουν τις τιμές **1** και **1.5** αντίστοιχα.



Εικόνα 4: Πλήθος ριζών – μοναδική ρίζα

- Πόσες ρίζες έχει η συνάρτηση; .....
- Αναφέρατε τον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσατε να βρείτε το πλήθος των ριζών της: .....
- Μετακινείτε τους δρομείς **κ** και **λ**, έτσι ώστε να πάρουν τις τιμές **-5** και **1.5** αντίστοιχα.
- Πόσες ρίζες έχει η συνάρτηση;
- Θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε τον προηγούμενο τρόπο για την εύρεση του πλήθους των ριζών της;

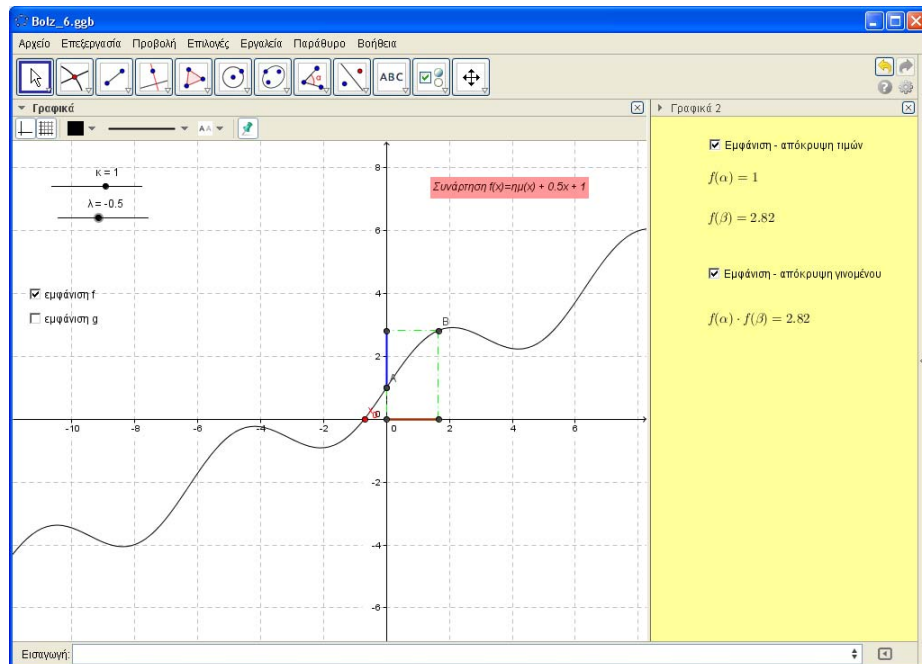


Εικόνα 5: Χωρίς μονοτονία

- Αναφέρατε τρόπους με τους οποίους θα μπορούσατε να απαντήσετε στο ερώτημα του πλήθους των ριζών.  
.....

## 2ο φύλλο εργασίας

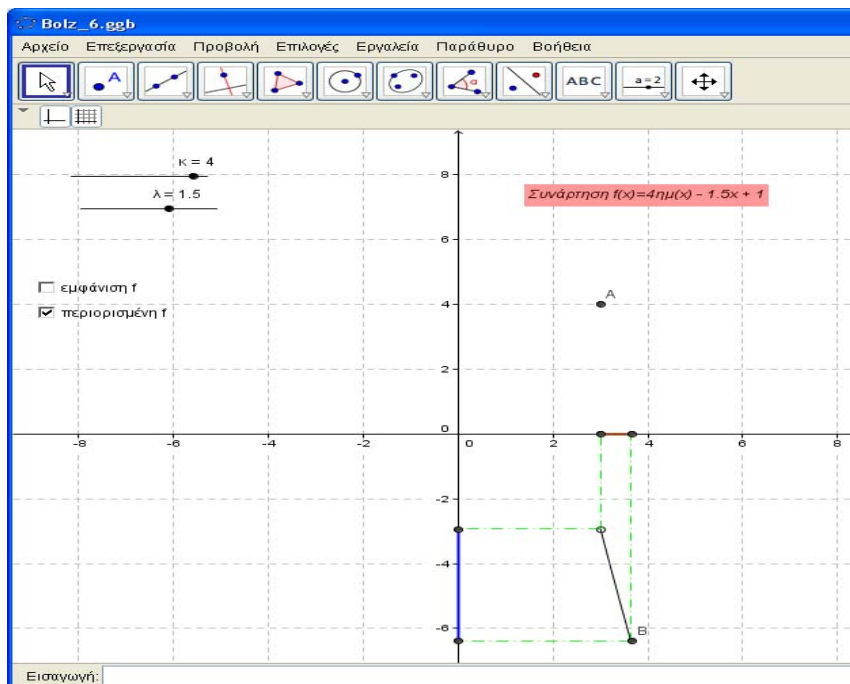
- Μετακινείτε τους δρομείς **κ** και **λ**, έτσι ώστε να πάρουν τις τιμές **1** και **-0.5** αντίστοιχα.
- Πόσες ρίζες έχει η συνάρτηση στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$ ;
- Η δεύτερη συνθήκη του θεωρήματος είναι ικανή για να μας δώσει το συμπέρασμα;



Εικόνα 6: Παραλλαγή

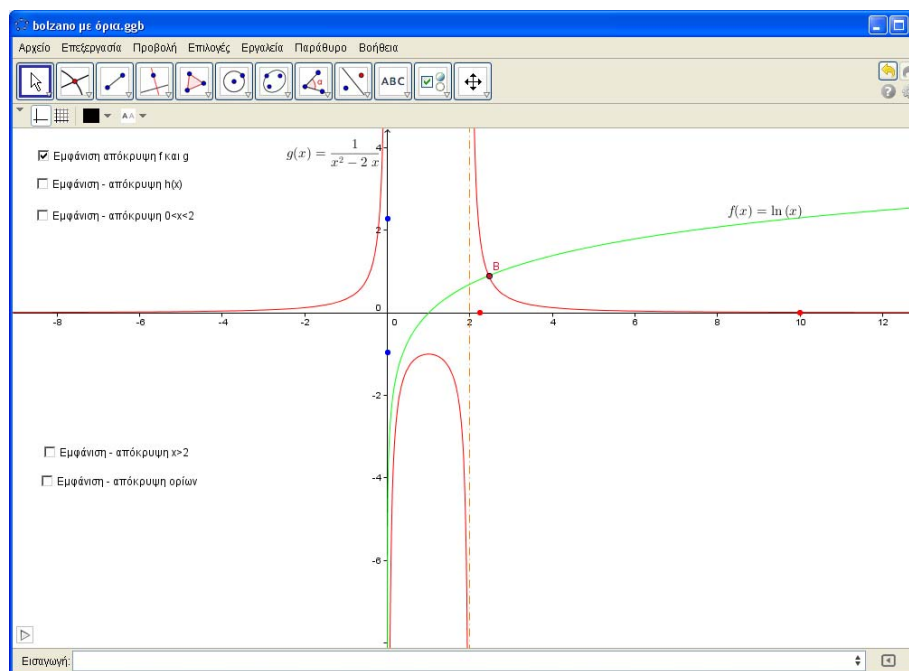
- Ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος. Σ      Λ
- Επιλέξτε «εμφάνιση περιορισμένης f », από - επιλέξτε «εμφάνιση f».
- Κλείστε την περιοχή «Γραφικά 2».
- Κάντε δεξί κλικ στο σημείο **x<sub>0</sub>** και επιλέξτε «Δείξε το αντικείμενο»
- Μετακινείτε τους δρομείς **κ** και **λ**, έτσι ώστε να πάρουν τις τιμές **4** και **1.5** αντίστοιχα.
- Είναι η συνάρτηση συνεχής στο διάστημα  $[ \alpha, \beta ]$ ; .....
- Ισχύει  $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ ; .....
- Τέμνει η γραφική παράσταση τον άξονα  $x'x$ ; .....
- Γιατί συμβαίνει αυτό; .....
- Ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος. Σ      Λ





Εικόνα 7: Αντίστροφο θεωρήματος

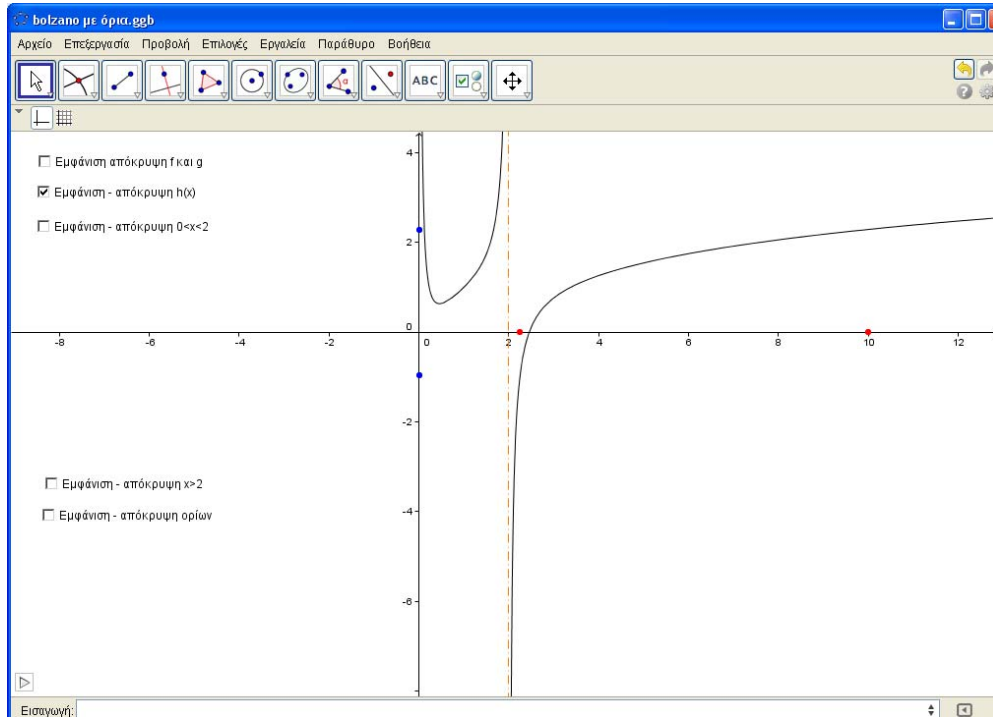
- Τι γίνεται στην περίπτωση που δεν μας δίνεται διάστημα;
- Ανοίξετε το αρχείο **bolzano με όρια.ggb**



Εικόνα 8: Σημεία τομής γραφικών παραστάσεων

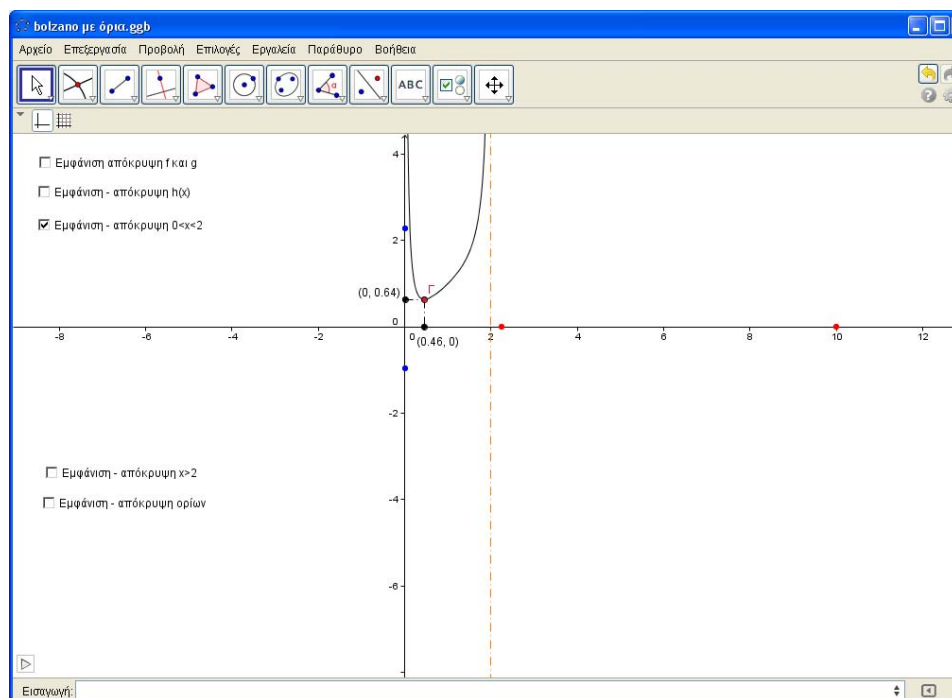
- Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$ , έχουν ένα σημείο τομής.

- Σε πόσα σημεία τέμνονται οι δύο γραφικές παραστάσεις; .....
- Πως θα εργαζόμασταν για να λύσουμε την άσκηση; .....
- Επιλέξτε την εμφάνιση της συνάρτησης  $h(x)=f(x)-g(x)$ . Σε πόσα σημεία τέμνει τον άξονα  $x'x$ ;

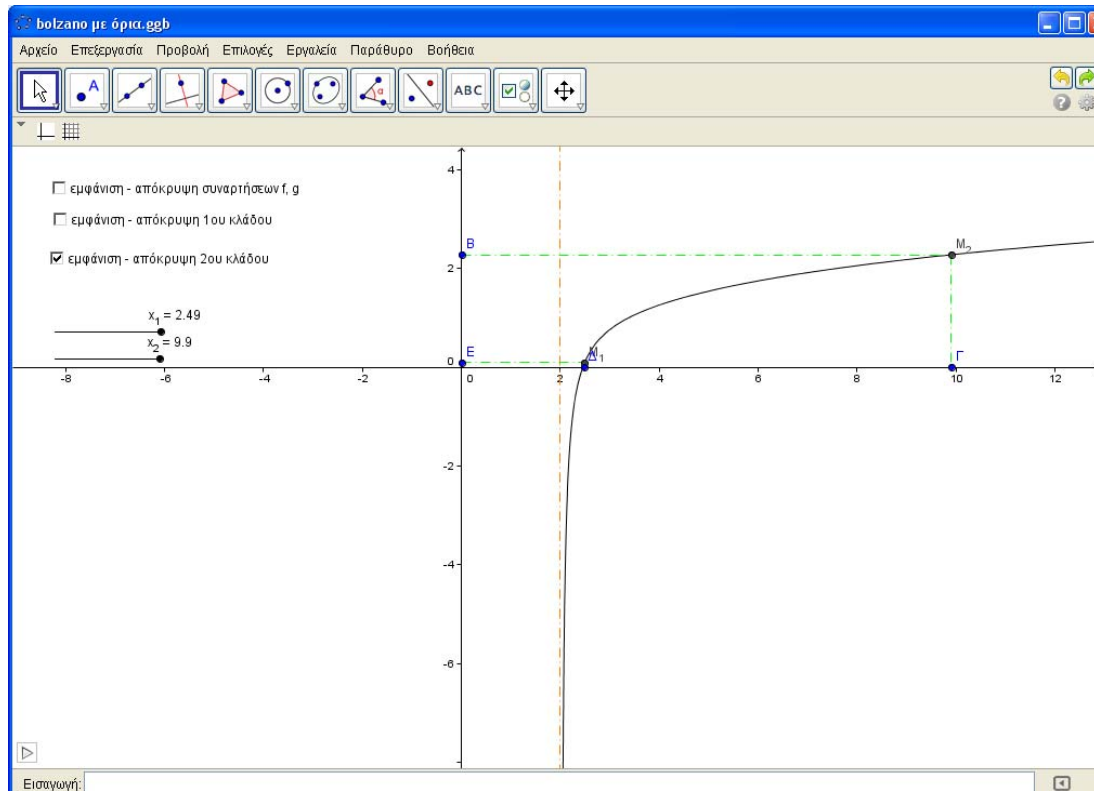


Εικόνα 9:  $h(x)=f(x)-g(x)$

- Επιλέξτε εμφάνιση 1<sup>ου</sup> κλάδου
- Πόσα σημεία τομής έχει με τον  $x'x$ . Πως θα το αποδεικνύαμε;

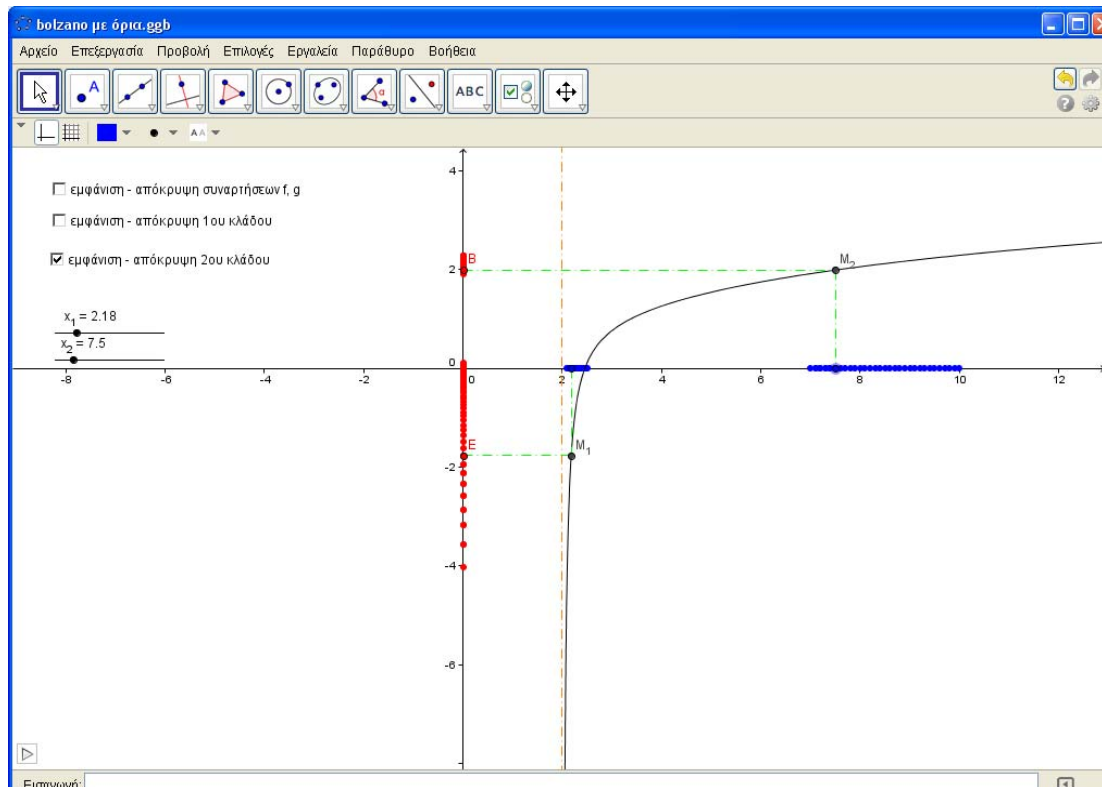


Εικόνα 10: Ακρότατο



Εικόνα 11: Πλήθος ριζών

- Επιλέξτε εμφάνιση 2<sup>ου</sup> κλάδου και απόκρυψη 1<sup>ου</sup> κλάδου.
- Σε πόσα σημεία τέμνει η γραφική παράσταση τον x'x. Πώς θα το αποδείξουμε;  
.....  
.....
- Να βρείτε τα όρια :  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \ln x - \frac{1}{x^2 - 2x} \right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln x - \frac{1}{x^2 - 2x} \right)$
- Επιλέξτε την εμφάνιση ορίων και συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας.
- Τι μπορούμε να πούμε για τις τιμές της συνάρτησης  $h(x) = f(x) - g(x)$  κοντά στο 2 και στη γειτονιά του απείρου;  
.....  
.....



Εικόνα 12: Οριακές τιμές

- Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bolzano;
- Σε ποιο διάστημα;
- Πατήστε το κουμπί κίνησης (κάτω αριστερά στην οθόνη)
- Παρατηρείστε τα ίχνη των τετμημένων και τεταγμένων των σημείων  $M_1$  και  $M_2$ .
- Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματά σας γραφικά.

## 8. Προτάσεις για περαιτέρω δραστηριότητες – προτεινόμενες εργασίες - επέκταση

- Απόδειξη ύπαρξης ρίζας σε κλειστό διάστημα
- Διατήρηση προσήμου συνάρτησης. Σε διαστήματα που είναι συνεχής η συνάρτηση και δεν μηδενίζει, εύκολα ο μαθητής παρατηρεί το συμπέρασμα της διατήρησης του προσήμου
- Εύρεση συνόλου τιμών. Σε όλες τις γραφικές παραστάσεις που παρουσιάστηκαν οι μαθητές κλήθηκαν να υπολογίσουν το σύνολο τιμών της κάθε συνάρτησης (εποπτικά) και διαπίστωσαν την αναγκαιότητα της συνέχειας.
- Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής. Στην άσκηση 6 του σχολικού βιβλίου (Εικόνα 2), οι μαθητές ήρθαν σε επαφή με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής και παρατήρησαν πως τα ακρότατα μιας συνεχούς συνάρτησης, δεν είναι υποχρεωτικά οι τιμές της συνάρτησης στα άκρα του κλειστού διαστήματος.
- Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. Στην τελευταία περίπτωση άσκησης (Εικόνα 12), συζητήθηκε με τους μαθητές το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

## 9. Συμπεράσματα

Τα συγκεκριμένα φύλλα εργασία δόθηκαν σε μαθητές της Θετικής Κατεύθυνσης. Πριν από την πραγματοποίηση της παρουσίασης είχαν διατεθεί

δύο διδακτικές ώρες για το συγκεκριμένο θέμα μέσα στην τάξη. Τους ζητήθηκε να συμπληρώσουν μια φόρμα αξιολόγησης. Διαπιστώθηκε ότι η γεωμετρική εποπτεία τους βοήθησε να κατανοήσουν σε βάθος την ενότητα και να ξεκαθαρίσουν αρκετές και βασικές έννοιες της Ανάλυσης.

Με τη χρήση του λογισμικού, μας δόθηκε η δυνατότητα να σχεδιάσουμε μια διδακτική πορεία που υποστήριζε το αναλυτικό πρόγραμμα, αλλά μας επέτρεψε να επεκταθούμε σε θέματα τα οποία δεν είναι δυνατόν να αντιμετωπιστούν με τα στατικά μέσα που συνήθως χρησιμοποιούνται.

Ο υπολογιστής, ως εργαλείο μέσα στην τάξη, βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα το συμπέρασμα του θεωρήματος του Bolzano, καθώς επίσης και τις συνέπειές του, προσφέροντας, παράλληλα, τη δυνατότητα οπτικοποίησης και συγκεκριμένης επεξεργασίας τους.

Γενικότερα θα μπορούσαμε να πούμε πως όταν ο υπολογιστής χρησιμοποιείται στην παραδοσιακή διδασκαλία ως συμπληρωματικό μέσο, επιτυγχάνεται μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα απ' ό,τι όταν χρησιμοποιείται ως η μοναδική βάση για διδασκαλία (Μ. Τουμάσης, Τ. Αρβανίτης).

#### 10. Βιβλιογραφία – Πηγές

(ITY, 2010). Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης. Τεύχος 4: Κλάδος ΠΕ03, Β' έκδοση Αναθεωρημένη & Εμπλουτισμένη. Πάτρα: ITY, σελ. 36, 37.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ. Πολύζος, Γ. (2012) Μαθηματικά Γ' Γενικού Λυκείου Θετική Κατεύθυνση. Αθήνα: Ινστιτούτο τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων ( ITYE) "Διοφαντός"

Τουμάσης Μ. Αρβανίτης Τ. «Διδασκαλία των Μαθηματικών με χρήση Η/Υ», Εκδόσεις Σαββάλας, Αθήνα (2003), σελ. 56.