Επέκταση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος με χρήση Τ.Π.Ε.

Ζαφειρόπουλος Χρήστος

Μαθηματικός Γυμνασίου & Λυκείου Καράτουλα
zafeiropouloschristos@yahoo.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα ξεκινώντας την ιστορική του παρουσία από την εποχή της Βαβυλώνας και την αποδεικτική του ανάδειξη από τον Πυθαγόρα, χρησιμοποιήθηκε αρχικά ως εργαλείο υπολογισμού και σχέσεων εμβαδών τετραγώνων. Αξιοποιήθηκε, κυρίως, στην αλγεβρική του μορφή ($α^2 = β^2 + γ^2$) σε όλες σχεδόν τις επιστήμες (φυσική, μηχανική, κ.α.) και κατέστη αναγνωρίσιμο ακόμα και σε χώρους της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Ξεκινώντας από τον Πυθαγόρα, τον Ευκλείδη και τον Αλεξανδρινό Πάππο, για τον υπολογισμό των εμβαδών σε ορθογώνιο τρίγωνο, θα προχωρήσουμε με τη χρήση των Τ.Π.Ε. στην παρουσίαση υπολογισμού των σχέσεων εμβαδών σε οξυγώνια και αμβλυγώνια τρίγωνα, αξιοποιώντας δημιουργικά την ύλη της Γεωμετρίας Β' Λυκείου. Οι Τ.Π.Ε. και συγκεκριμένα το λογισμικό, δυναμικής γεωμετρίας, Geogebra καθίστανται το απαραίτητο εργαλείο για την αποτελεσματική και εύκολη μελέτη συμπλεκόμενων και πολύπλοκων μαθηματικών σχημάτων και σχέσεων. Με αυτόν τον τρόπο δίνεται η δυνατότητα τόσο στους μαθητές όσο και στους εκπαιδευτικούς, να συνδεθούν ενσώματα και δημιουργικά με τις προσεγγίσεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος, ανταποκρινόμενοι στις σύγχρονες παιδαγωγικές-διαδακτικές απαιτήσεις, καθώς και τις τεχνολογικές εξελίξεις.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *Πυθαγόρειο Θεώρημα, Επέκταση Πυθαγορείου Θεωρήματος, Τ.Π.Ε.*

ΣΤΟΧΟΘΕΣΙΑ

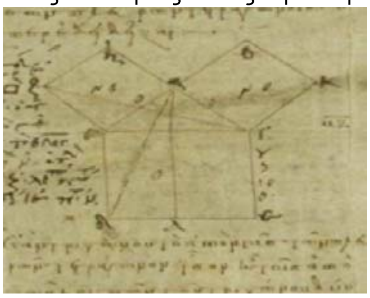
Με αφετηρία το Πυθαγόρειο Θεώρημα επιδιώκεται οι μαθητές να διαπιστώσουν την ιστορική διαδρομή του, την πληθώρα των προσεγγίσεων του και τα περιθώρια για νέες προεκτάσεις. Επιπλέον, να εξοικειωθούν με το δυναμικό λογισμικό Geogebra, που δίνει τη δυνατότητα στο διδάσκοντα να δημιουργήσει ένα διερευνητικό περιβάλλον, μέσα στο οποίο οι μαθητές θα ανακαλύψουν συνεργατικά αναλλοίωτες σχέσεις μεταξύ γεωμετρικών μεγεθών.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗ

Με τη χρήση των Τ.Π.Ε. (Geogebra) στην διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος, η γνώση οικοδομείται σε προϋπάρχουσα γνώση από τον ίδιο το μαθητή (Piaget), καθώς μέσω της προσωπικής εμπλοκής διερευνά, ανακαλύπτει σταδιακά, κάνει υποθέσεις, τις οποίες διαψεύδει ή επαληθεύει (Bruner). Ο εκπαιδευτικός γίνεται συντονιστής και εμψυχωτής της προσπάθειας, ενώ προωθείται η συνεργατική μάθηση (Vygotsky) (οπ.αναφ. στο Ζαγούρας, 2013). Επίσης, οι Τ.Π.Ε. οπτικοποιούν πολλαπλές αναπαραστάσεις των εννοιών και σχέσεων του υπό διαπραγμάτευση θέματος (Vegnaud) (οπ. αναφ. στο Κυνηγός, 2010).

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ: ΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι γνωστό κυρίως για την σχέση των εμβαδών των τετραγώνων που σχετίζονται με τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου.

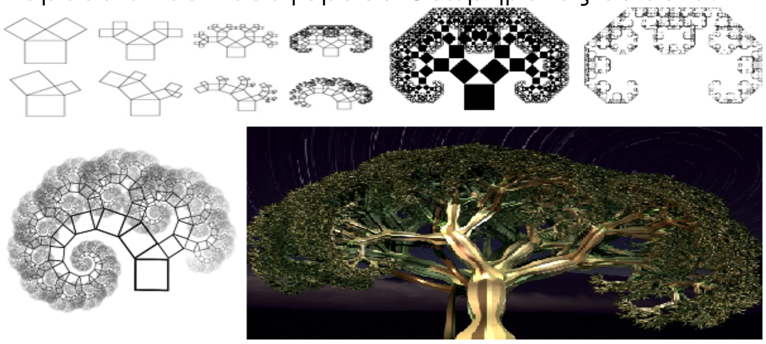


Σχήμα 1: Πυθαγόρειο Θεώρημα

Στο σχήμα 1 βλέπουμε την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου, με την μορφή που παρουσιάζεται στα Στοιχεία (Κοντογεώργης, 2004, σ.σ. 4-6). Η υποτείνουσα (σύνθετη λέξη, «υπό» και «τείνω») είναι η πλευρά απέναντι από την ορθή γωνία, η οποία δύναται να επεκταθεί υπό μορφή τετραγώνου. Το τετράγωνο με πλευρά την υποτείνουσα έχει εμβαδό ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων των δυο καθέτων πλευρών: Πυθαγόρειο Θεώρημα (Βλάμος κ συν 2011, σ.σ. 126-132).

«ΤΟ ΔΕΝΤΡΟ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΑ»

Επικαλούμαστε τα ευφάνταστα fractals και αναθέτουμε στους μαθητές, αφού τους έχουμε ήδη χωρίσει σε έξι ομάδες των τριών ατόμων, στο εργαστήριο πληροφορικής να επισκεφτούν με τη βοήθεια ενός φυλλομετρητή (Internet Explorer, Google Chrome, κ.α.) την ιστοσελίδα: http://www.phidelity.com/photos/v/Artwork/Xenodream/pythagorean/geomeTree3.jpg.html?g2_imageViewsIndex=1 και να εντοπίσουν την παρουσία του Πυθαγορείου Θεωρήματος σε αυτά.

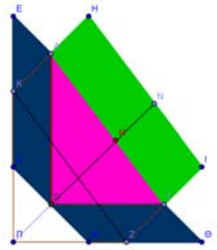


Σχήμα 2: «Το Δέντρο του Πυθαγόρα»

ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

Σύμφωνα, όμως, με τον Ευκλείδη *(Στοιχεία, βιβλίοVI, πρόταση 31*, οπ. αναφ. *στο* Κοντογεώργης, 2004), το ίδιο συμβαίνει και για άλλα σχήματα, εκτός των τετραγώνων, αρκεί να είναι όμοια.

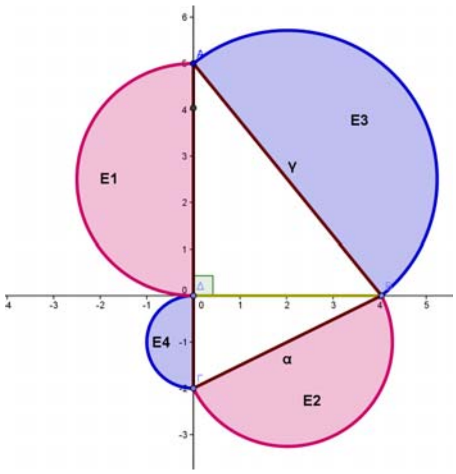
Ο Πάππος προεκτείνοντας τη γεωμετρική σκέψη του Ευκλείδη απέδειξε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΗΙΓΑ που «σχηματίζει» η υποτείνουσα ΑΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των παραλληλογράμμων ΕΑΒΔ και ΒΓΘΦ (Παπαδοπούλου, Β., & Ευθυμίου, Β., ανακτήθηκε από http://www.math.uoc.gr/~jplatis/pythagoras.pdf). Στη συνέχεια, αφιερώνεται χρόνος για την εξοικείωση των μαθητών με το λογισμικό Geogebra, που είναι ήδη εγκατεστημένο στην επιφάνεια εργασίας.



Σχήμα 3: GeoGebra Πάππου

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΕΠΕΚΤΑΣΗΣ ΑΠΟ ΤΟ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

Ζητείται από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «Geogebra Οξείας». Σε αυτό, με την χρήση του λογισμικού GeoGebra (ή συναφούς λογισμικού γεωμετρίας όπως Cabri, Sketchpad κ.τ.λ.) ο διδάσκων έχει δημιουργήσει ένα οξυγώνιο τρίγωνο και ημικύκλια, τα οποία έχουν διάμετρο δύο πλευρές του τριγώνου και τις προβολές τους στην τρίτη πλευρά. Οι μαθητές πρέπει με γεωμετρικούς υπολογισμούς να αποδείξουν ότι: E1+E2=E3+E4.



Σχήμα 4: GeoGebra Οξείας

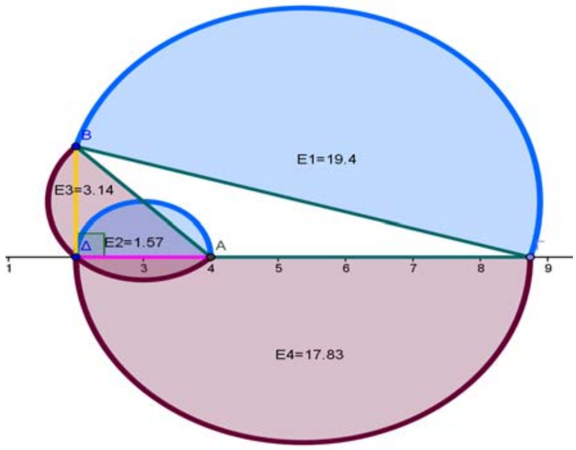
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta \to \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta + A\Delta^2 - A\Delta^2 \to$$

$$\alpha^2 + A\Delta^2 = (\beta - A\Delta)^2 + \gamma^2 \to \frac{1}{8}\pi\alpha^2 + \frac{1}{8}\pi A\Delta^2 = \frac{1}{8}\pi\Gamma\Delta^2 + \frac{1}{8}\pi\gamma^2 \to E1 + E2 = E3 + E4$$

ΠΡΩΤΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

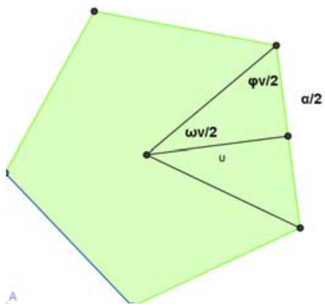
Οι μαθητές καλούνται να ανοίξουν το αρχείο «Geogebra Αμβλείας», όπου με την χρήση του GeoGebra θα επιχειρήσουν να αποδείξουν την επέκταση του Πυθαγορείου Θεωρήματος σε αμβλυγώνιο τρίγωνο. Επιπλέον, μετακινώντας την κορυφή Γ να ελέγξουν ότι E1+E2=E3+E4.



Σχήμα 5: Geogebra Αμβλείας

ΔΕΥΤΕΡΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

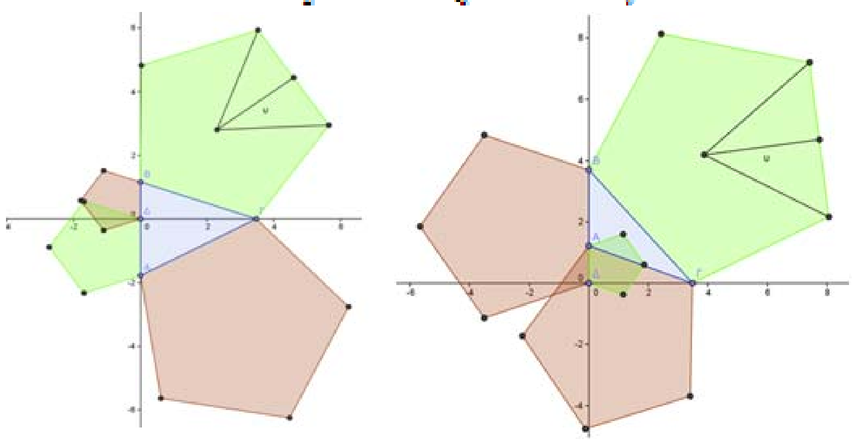
Στη συνέχεια, οι μαθητές θα επιχειρήσουν αξιοποιώντας το λογισμικό GeoGebra να επαναλάβουν και να αποδείξουν την προηγούμενη εφαρμογή με κανονικά πολύγωνα (σε γενική μορφή) τόσο για οξυγώνιο όσο και για αμβλυγώνιο τρίγωνο, σε σχήματα που θα κατασκευάσουν οι ίδιοι, χρησιμοποιώντας κανονικά πολύγωνα δικής τους επιλογής.



Σχήμα 6 Τυχαίο Κανονικό Πολύγωνο

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\varphi\nu}{2}\right) = \varepsilon\varphi\left(90 - \frac{180}{\nu}\right) = \frac{\upsilon}{\frac{\alpha}{2}} \rightarrow \upsilon = \frac{\alpha}{2} \cdot \varepsilon\varphi\left(90 - \frac{180}{\nu}\right) \rightarrow$$

$$E = \nu \cdot \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon = \nu \cdot \frac{\alpha^2}{4} \cdot \varepsilon\varphi\left(90 - \frac{180}{\nu}\right)$$



Σχήμα 6: GeoGebra Οξυγώνιο και Αμβλυγώνιο Τρίγωνο με Πολύγωνα

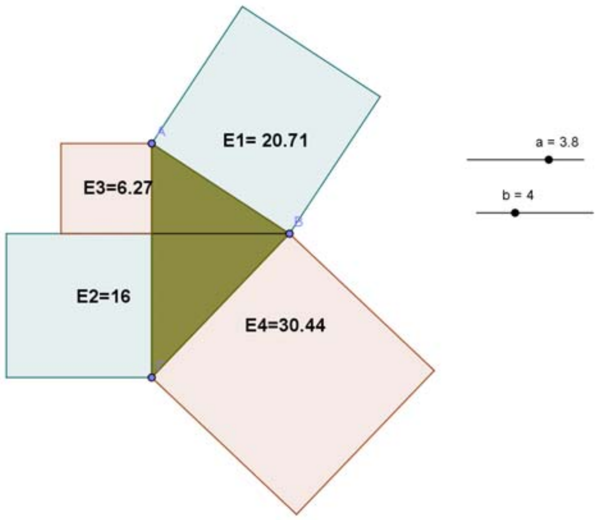
Ενδεικτική Απόδειξη για Οξυγώνιο Τρίγωνο:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta \rightarrow \alpha^2 + A\Delta^2 = \beta^2 + B\Delta^2 \rightarrow$$

$$\frac{\nu}{4} \cdot \varepsilon\varphi\left(90 - \frac{180}{\nu}\right) \cdot \alpha^2 + \frac{\nu}{4} \cdot \varepsilon\varphi\left(90 - \frac{180}{\nu}\right) \cdot A\Delta^2$$
$$= \frac{\nu}{4} \cdot \varepsilon\varphi\left(90 - \frac{180}{\nu}\right) \cdot \beta^2 + \frac{\nu}{4} \cdot \varepsilon\varphi\left(90 - \frac{180}{\nu}\right) \cdot B\Delta^2 \rightarrow$$
$$E1 + E2 = E3 + E4$$

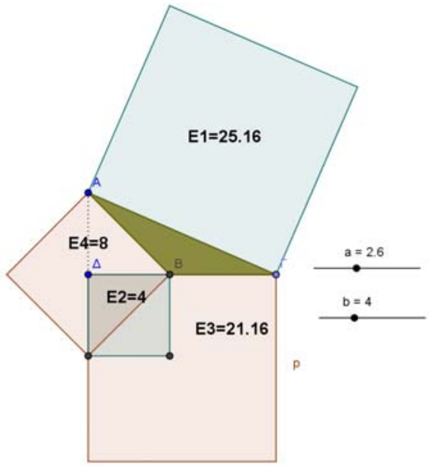
ΤΡΙΤΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΕΠΕΚΤΑΣΗΣ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

Ζητείται από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «GeoGebra Τετράγωνα» όπου με την χρήση του GeoGebra μέσω αλγεβρικών υπολογισμών και εξειδικευμένων αποδείξεών τους, θα επιβεβαιώσουν την επέκταση του Πυθαγορείου Θεωρήματος για το ισόπλευρο τρίγωνο, το κανονικό εξάγωνο και για το τετράγωνο. Μετακινώντας τον δρομέα b τα προαναφερθέντα κανονικά πολύγωνα θα εναλλάσσονται αυτόματα. Στο τέλος, τη γνώση, που απέκτησαν διερευνητικά, θα πρέπει να τη διατυπώσουν σε ένα πρωτότυπο ορισμό που θα εκφράζει την επέκταση του Πυθαγορείου Θεωρήματος για το τετράγωνο σε οξυγώνια και σε αμβλυγώνια τρίγωνα.



Σχήμα7: GeoGebra Οξυγώνιο Τρίγωνο με Τετράγωνα

Παράδειγμα διατύπωσης ορισμού της επέκτασης του Πυθαγορείου Θεωρήματος σε οξυγώνιο τρίγωνο από τους μαθητές: «Σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο, η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός οξυγωνίου τριγώνου, ισούται με την αντίθετη διαφορά των τετραγώνων των προβολών των πλευρών αυτών στην τρίτη πλευρά».



Σχήμα8 GeoGebra Αμβλυγώνιο Τρίγωνο με Τετράγωνα

Παράδειγμα διατύπωσης ορισμού της επέκτασης του Πυθαγορείου Θεωρήματος σε αμβλυγώνιο τρίγωνο από τους μαθητές: «Σε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο, η διαφορά των τετραγώνων της πλευράς που βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία και μιας άλλης πλευράς, ισούται με την διαφορά των τετραγώνων των προβολών των πλευρών αυτών στην τρίτη πλευρά».

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ Τ.Π.Ε. ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

1. Η χρήση των Τ.Π.Ε αναδεικνύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα ως προϊόν «σημειωτικής έκφανσης» ενός μαθηματικού μοντέλου και αξιοποιεί τη δημιουργική ανάδειξη καινούργιων αντικατοπτρισμών και περιγραφών, προσιτών στην εφηβική νόηση. Η υποκειμενικότητα της «αρχικής ιδέας» του Ευκλείδη επικαιροποιείται ως προς τις ανάγκες των μαθητών, καθιστώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα με αυτόν το τρόπο προσιτό και εξελισσόμενο.

2. Η αξιοποίηση ενός μαθηματικού εργαλείου των Τ.Π.Ε. όπως του GeoGebra συμβάλλει στην αντιμετώπιση της πολυπλοκότητας των σχέσεων και των σχημάτων. Με το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας, η μελέτη της επέκτασης του Πυθαγορείου Θεωρήματος θα περιοριζόταν σε αλγεβρικές κυρίως διατυπώσεις και σε συγκεκριμένα σχήματα, χάνοντας με αυτόν τον τρόπο τον αρχικό χαρακτήρα της περιώνυμης παρουσίασής του από τον Ευκλείδη, ως σχέση εμβαδών.

3. Η εφαρμογή των Τ.Π.Ε. καθιστά τον τρόπο προσέγγισης του διδακτικού αντικειμένου πιο ελκυστικό, καθώς οι μαθητές μετακινώντας ελεύθερα ορισμένα στοιχεία του σχήματος μπορούν, μέσω οπτικών αλληλεπιδράσεων, να παρατηρήσουν πως ανταποκρίνονται δυναμικά σε αυτές τις αλλαγές και άλλα στοιχεία, χωρίς να αναλώνονται σε πολύπλοκους μαθηματικούς υπολογισμούς.

4. Η προτεινόμενη εκπαιδευτική αναφορά αποτελεί μια προσπάθεια απομάκρυνσης από το παραδοσιακό πλαίσιο της διδασκαλίας των γεωμετρικών θεωριών, ευελπιστώντας να συμβάλει στη βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά. Με την χρήση των Τ.Π.Ε. προσφέρεται η δυνατότητα γρήγορης ανάκτησης παλαιοτέρων γνώσεων και ανακάλυψης νέων, οι οποίες μάλιστα φέρουν την αποκλειστική και προσωπική σφραγίδα του κάθε μαθητή (Τριανταφύλλου, 2008, σ.122).

5. Η διδακτική αξιοποίηση τεχνολογικών εργαλείων δίνει νέες ευκαιρίες για δημιουργία μαθησιακών περιβαλλόντων στα οποία οικοδομούνται σχέσεις

συνεργασίας μεταξύ του καθηγητή, ως καθοδηγητή, και των μαθητών, αλλά και των μαθητών μεταξύ τους, βελτιώνοντας τις παραδοσιακές διδακτικές προσεγγίσεις, αλλά κυρίως εισάγοντας νέες μορφές και ευκαιρίες μάθησης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

Οι μαθητές, με την χρήση του λογισμικού GeoGebra, ενεπλάκησαν με δυναμικό τρόπο εξετάζοντας τις σχέσεις των εμβαδών και επεκτείνοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Ο συνεχής μετασχηματισμός των γεωμετρικών σχεδίων ανέδειξε νέες προεκτάσεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος σε όμοια σχήματα ως προς τα αμβλυγώνια και οξυγώνια τρίγωνα και έδωσε στους μαθητές τη δυνατότητα εμπειρικά και διαισθητικά να ανακαλύψουν και να διατυπώσουν κανόνες σχετικούς με τα υπό διερεύνηση θέματα.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ. & Χρυσοβέργης, Μ. (2012). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ. & Σιδέρης, Π. (2009). *ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α' και Β' Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ. & Ρεκούμης, Κ. (2011). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Ζαγούρας, Χ., (Επιμ.) (2013). *Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης και Επιμόρφωσης*. Τεύχος 1: Γενικό Μέρος (3η εκ.). Πάτρα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών.

Κοντογεώργης, Π,. (2004). *Σχολιασμός του Βιβλίου VI Των Στοιχείων σε συνδυασμό με τα Δεδομένα του Ευκλείδη*. (Διδακτορική Διατριβή του Πανεπιστημίου Αθηνών. Ανακτήθηκε από http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_kontogeorgis.pdf στις 29 Ιανουαρίου 2014.

Κυνηγός, Χ. (Επιμ.) (2010). *Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης και Επιμόρφωσης*. Τεύχος 4: Κλάδος ΠΕ03 (2η εκ.). Πάτρα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών.

Παπαδοπούλου, Β., & Ευθυμίου, Β., *Η ιστορία του Πυθαγόρα και του Πυθαγορείου Θεωρήματος* ανακτήθηκε από http://www.math.uoc.gr/~jplatis/pythagoras.pdf στις 29 Ιανουαρίου 2014.

Τριανταφύλλου, Δ., (2008). *Μια Μελέτη για τη Διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος μέσω της Θεωρίας των Ενσώματων Μαθηματικών "Embodied Mathematics.*(Διαπανεπιστημιακή Διατριβή του Πανεπιστημίου Αθηνών και Κύπρου Ανακτήθηκε από http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_triantafyllou.dimos.pdf στις 29 Ιανουαρίου 2014.

Φάκας, Ι., (2013). Ένα αλλιώτικο Πυθαγόρειο Θεώρημα. Πρακτικά *29ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, Καλαμάτα, 9-11 Νοεμβρίου 2013, 907-916.

GeomeTree3. Ανακτήθηκε από http://www.phidelity.com/photos/v/Artwork/Xenodream/pythagorean/geomeTree3.jpg.html?g2_imageViewsIndex=1 στις 29 Ιανουαρίου 2014.

Pythagoras' theoren,(2009). Ανακτήθηκε από http://www.mathcentre.ac.uk/resources/uploaded/mc-ty-pythagoras-2009-1.pdf στις 29 Ιανουαρίου 2014.