Μια διαφορετική προσέγγιση για την κατασκευή των γεωμετρικών τόπων των κωνικών τομών με το λογισμικό GeoGebra

Αργύρη Παναγιώτα

Μαθηματικός στο Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
argiry@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εποχή της επανάστασης της γνώσης και της πληροφορίας, η υπολογιστική τεχνολογία έχει εισβάλλει και στην μαθηματική εκπαίδευση. Μαθητές και εκπαιδευτικοί καλούνται να αξιοποιήσουν τα ψηφιακά εργαλεία στην μάθηση και την διδασκαλία των μαθηματικών. Η παρούσα πρόταση διδασκαλίας αξιοποιεί τις καινοτομίες που προσφέρει το λογισμικό GeoGebra, ώστε μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής ενότητας των κωνικών τομών να δοθεί στους μαθητές και μία διαφορετική προσέγγιση των ιδιοτήτων των γεωμετρικών τόπων των σημείων τους. Μέσα από καθοδηγούμενες δραστηριότητες, που υλοποιούνται με βάση κατάλληλα διδακτικά σχεδιασμένες ερωτήσεις σε φύλλα εργασίας δίνεται η δυνατότητα επανάληψης των βασικών ιδιοτήτων των γεωμετρικών τόπων των κωνικών τομών (παραβολή, έλλειψη, υπερβολή), μέσω των πολλαπλών μετασχηματισμών και αναπαράστασεων των σχετικών θέσεων κύκλων και ευθειών.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *λογισμικό GeoGebra, κωνικές τομές, σχετικές θέσεις κύκλων*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται η διδασκαλία μίας επαναληπτικής άσκησης για την διερεύνηση των γεωμετρικών τόπων των κωνικών τομών (Ασκηση 10 σχολικό βιβλίο Μαθηματικών Κατεύθυνσης Β Λυκείου σελίδα 131), που υλοποιήθηκε με βάση τις δυνατότητες και τα πλεονεκτήματα που προσφέρει το λογισμικό geogebra. Ο σχεδιασμός της διδασκαλίας στηρίχτηκε σε βασικές αρχές της μάθησης των Μαθηματικών, οι οποίες προάγουν την ενεργό συμμετοχή των μαθητών, την κοινωνική τους αλληλεπίδραση, την ανάπτυξη της αυτορύθμισης και της εσωτερικής σκέψης τους, για την σύνδεση νέων πληροφοριών με τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους, μέσα απο την χρήση των νέων τεχνολογιών (Βοσνιάδου, 2001). Η υλοποίηση της διδασκαλίας της συγκεκριμένης επαναληπτικής άσκησης για τις ιδιότητες των γεωμετρικών τόπων των κωνικών τομών δίνει την δυνατότητα στους μαθητές να ενεργοποιήσουν την προϋπάρχουσα γνώση τους, μέσα απο την αξιοποίηση του μαθηματικού λογισμικού GeoGebra. Μέσα απο την ανάλυση των φάσεων διεξαγωγής της διδασκαλίας τονίζεται ο βασικός ρόλος των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία των μαθηματικών, οι οποίες εξασφαλίζουν ενα ανοιχτό μαθησιακό περιβάλλον, όπου οι μαθητές εμπλέκονται ενεργά, πειραματίζονται, διερευνούν και εξάγουν συμπεράσματα και γενικεύσεις, με βασικό στόχο την επανάληψη και την βαθύτερη κατανόηση μαθηματικών γνώσεων που έχουν διδαχτεί.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Με την εισαγωγή των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας στην εκπαίδευση έχει αλλάξει ο τρόπος προσέγγισης και διδασκαλίας της Ευκλείδειας και της Αναλυτικής Γεωμετρίας.Κατά την αποδεικτική διαδικασία, μέσα στα πλαίσια ενός υπολογιστικού περιβάλλοντος δυναμικής γεωμετρίας(ΥΠΔΓ), οι υποθέσεις για τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων, που διατυπώνονται στα γεωμετρικά θεωρήματα, μετατρέπονται σε υποθέσεις προς διερεύνηση. Τα ΥΠΔΓ αποτελούν εικονικά εργαστήρια, στα οποία οι μαθητές μέσα από την εξερεύνηση και τον πειραματισμό, μπορούν να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες (Hadas,2000). Σε ένα παραδοσιακό μάθημα Αναλυτικής Γεωμετρίας, οι μαθητές ως παθητικοί ακροατές μαθαίνουν ορισμούς και θεωρήματα, προβλήματα και αποδείξεις, χωρίς να αποκτούν την εμπειρία της ανακάλυψης των γεωμετρικών σχέσεων, χωρίς να κάνουν κάποια μαθηματική ανακάλυψη ή εφεύρεση. Τα λογισμικά της δυναμικής Γεωμετρίας είναι ακριβώς κατάλληλα για να οδηγήσουν τον μαθητή σε εξερεύνηση και ανακάλυψη, είτε καθοδηγημένα είτε τελείως ανοικτά **(**Schwartz &Yerushalmy, 1986). Ακόμα και οι μαθητές με χαμηλή επίδοση στο μάθημα της γεωμετρίας, επιδεικνύουν την ανάγκη να επεξηγήσουν τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων που παρουσιάζονται στην οθόνη του υπολογιστή, ανεξάρτητα από το γεγονός ότι μπορεί να μην νιώθουν την ανάγκη να βεβαιωθούν για αυτές τις ιδιότητες. Έτσι οι εκπαιδευτικοί και κυρίως οι μαθητές διατυπώνουν αιτιολογήσεις με την μορφή μαθηματικών επιχειρημάτων και προσπαθούν να εξηγήσουν ικανοποιητικά, γιατί το αποτέλεσμα της οθόνης του υπολογιστή είναι αληθές (Jones, 2000). Οι μαθηματικές επεξηγήσεις διαρθρώνονται και οργανώνονται μέσω του μαθηματικού συλλογισμού και μετατρέπονται σε μία γεωμετρική απόδειξη.

Για την διαπραγμάτευση των δραστηριοτήτων του φύλλου εργασίας της συγκεκριμένης διδασκαλίας το πλαίσιο της δυναμικής γεωμετρίας παρέχει την ακρίβεια της κατασκευής των γεωμετρικών σχημάτων και την προσέγγιση των πολλαπλών μορφών τους με την βοήθεια του 'συρσίματος'. Επιπλεόν, με την εισαγωγή των δρομέων για την μεταβολή της θέσης μίας ευθείας, η μετατόπιση των σημείων του γεωμετρικού σχήματος ,η μεταβολή των ακτίνων των κύκλων και η ενεργοποίηση του ίχνους για τα σημεία του γεωμετρικού σχήματος δίνει την δυνατότητα μετασχηματισμού, μέσω των πολλαπλών αναπαραστάσεων. Κατα αυτόν τον τρόπο τα χαρακτηριστικά στοιχεία των κωνικών τομών (διευθετούσα και εστία της παραβολής, εστίες της έλλειψης και της υπερβολής, το μήκος του μεγάλου ή του μικρού άξονα τους) μεταβάλλονται και οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να παρατηρούν πως ανταποκρίνονται τα υπόλοιπα στοιχεία σε αυτές τις αλλαγές. Απο την άλλη, οι υπολογιστικές δυνατότητες και η ταχύτητα ανταπόκρισης του λογισμικού στις αιτούμενες ενέργειες δίνει το πλεονέκτημα των μετρήσεων των αποστάσεων σημείων του γεωμετρικού σχήματος, χωρίς δαπάνη διδακτικού χρόνου, ώστε οι μαθητές να οδηγηθούν στην εξαγωγή των συμπερασματων τους.

ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

i) Ιδιότητες των σημείων των γεωμετρικών τόπων των σημείων της παραβολής, της έλλειψης και της υπερβολής (ανακλαστική ιδιότητα, εξίσωση εφαπτομένης, άξονες συμμετρίας των κωνικών τομών, εκκεντρότητα)

ii) Ικανές και αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν η απόσταση των κέντρων δύο κύκλων σε σχέση με τις αντίστοιχες ακτίνες τους, ώστε α) δύο κύκλοι να εφάπτονται εσωτερικά ή εξωτερικά β) ο ένας κύκλος να βρίσκεται στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό του άλλου. Την ικανή και αναγκαία συνθήκη που πρέπει ικανοποιεί η απόσταση μίας ευθείας απο το κέντρο του κύκλου σε σχέση με την ακτίνα του κύκλου, ώστε η ευθεία να είναι εφαπτομένη (να εφάπτεται) του κύκλου.

ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΟΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ:

i) Να συνδέσουν και να κάνουν επανάληψη των προϋπάρχουσων γνώσεων τους για την εμπέδωση και βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών γνώσεων για τους γεωμετρικούς τόπους των σημείων της παραβολής, της έλλειψης και της υπερβολής.

ii) Να αποδείξουν τις ακόλουθες πρότασεις που αφορούν τους γ.τ των σημείων των κωνικών τομών που έχουν διδαχτεί: Α) τα κέντρα των κύκλων που εφάπτονται σε μία ευθεία και κύκλο, ανήκουν σε παραβολή με εστία το κέντρο του κύκλου Β) τα κέντρα των κύκλων που εφάπτονται σε δύο κύκλους, εκ των οποίων ο ένας είναι στο εσωτερικό του άλλου ,ανήκουν σε έλλειψη με εστίες τα κέντρα των δύο κυκλων και μήκος μεγάλου άξονα το άθροισμα των ακτίνων των δύο κύκλωνν Γ) τα κέντρα των κύκλων που εφάπτονται σε δύο κύκλους,που βρίσκονται ο ένας εκτός του άλλου, ανήκουν σε υπερβολή με εστίες τα κέντρα των δύο κυκλων και απόσταση των κέντρων της ίση με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των ακτίνων των δύο κύκλων

iii) Να εφαρμόσουν τις αποδείξεις των παραπάνω προτάσεων διατυπώνοντας τις αντίστοιχες μαθηματικές εξισώσεις των κωνικών τομών, καθώς και τις ιδιότητες των σημείων τους

iv) Κατεπέκταση των παραπάνω στο μάθημα της γεωμετρίας να μπορούν να κατασκευάσουν Α) κύκλο που εφάπτεται σε κύκλο και ευθεία. Β) κύκλο που εφάπτεται σε δύο κύκλους, εκ των οποίων ο ένας είναι στο εσωτερικό του άλλου. Γ) κύκλο που εφάπτεται σε δύο κύκλους, εκ των οποίων ο ένας είναι στο εξωτερικό του άλλου.

ΚΟΙΝΩΝΙΚΗ ΕΝΟΡΧΗΣΤΡΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Στο πλαίσιο της κοινωνικής μάθησης που κατά κανόνα συντελείται σε μια σχολική τάξη στην οποία κυριαρχεί *η κονστρουκτιβιστική προσέγγιση στη μάθηση,* η διδασκαλία δίνει ευκαιρίες σε κάθε μαθητή να αναπτύσσει εικασίες, να διατυπώνει υποθέσεις και να τις εκθέτει στην τάξη. Καθώς η κοινωνική μάθηση είναι άμεσα συνδεδεμένη με την ατομική μάθηση, η εξασφάλιση ευκαιριών για ενεργό συμμετοχή κάθε μαθητή ατομικά στα δρώμενα της τάξης, κάτω από την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού και την ύπαρξη κατάλληλου εκπαιδευτικού λογισμικού, μπορεί να εξασφαλίσει πλούσιες συζητήσεις μεταξύ των μαθητών. Αυτές μπορούν να βασίζονται στις προσωπικές εμπειρίες των μαθητών αλλά και στην ανάλυση, σύνθεση και δόμηση των πληροφοριών που αντλούν από τους πόρους της όλης ρύθμισης με αποτέλεσμα κάθε μαθητής να αναπτύσσει νοήματα σχετικά με το θέμα διδασκαλίας.

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο το κατασκευαστικό μοντέλο (κονστρουκτιβισμός) αποτέλεσε το πλαίσιο μέσα στο οποίο δομήθηκε ο διδακτικός σχεδιασμός. Ο μαθητής αποτέλεσε απο την μία ένα εργαστήριο κατασκευής της γνώσης και απο την άλλη μέρος μίας ομάδας, με την οποία επικοινωνούσε και διαπραγματευόταν. Αυτό σημαίνει ότι τόσο το ατομικό στοιχείο όσο και η κοινωνική υπόσταση λαμβάνονταν υπόψιν. Το κοινό φύλλο εργασίας και η κοινή οθόνη αποτελούσαν τον πυρήνα επικοινωνίας στην ομάδα και προσδιόριζαν την κοινωνική συνιστώσα, ενώ ο τρόπος με τον οποίο ο διδάσκων επικοινωνούσε προσωπικά με τον καθένα υπογράμμιζε την ατομική συνιστώσα.

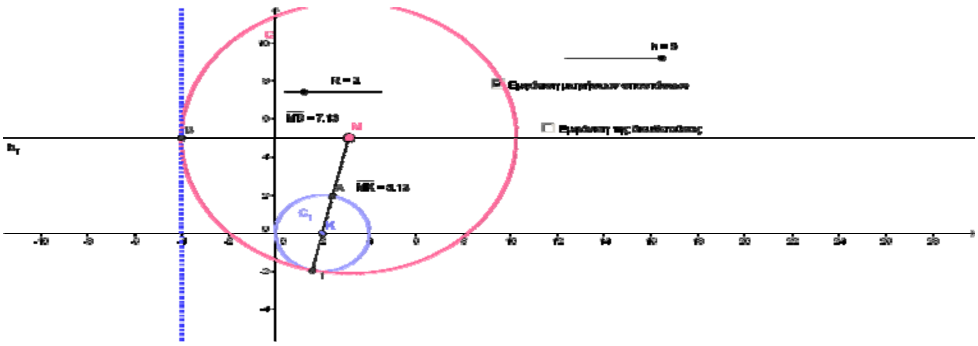
Οι μαθητές επεξεργαστηκαν τις δραστηριότητες των φύλλων εργασίας τους οι οποίες περιείχαν κατάλληλα διδακτικά σχεδιαμένες ερωτήσεις, που διαπραγματεύχθηκαν και υλοποιήθηκαν με την βοήθεια και την καθοδήγηση του διδάσκοντα. Μέσα στην μαθηματική σχολική τάξη κυριάρχησε η αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών, αλλά και μεταξύ των μαθητών και του εκπαιδευτικού μέσα από τον διάλογο, την ανταλλαγή απόψεων και την διατύπωση επιχειρημάτων και αιτιλογήσεων για την εξαγωγή συμπερασμάτων και γενικεύσεων.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΠΟΡΕΙΑΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Ο χρόνος υλοποίησης της διδασκαλίας της επαναληπτικής άσκησης ήταν 2 διδακτικές ώρες και τα μέσα διδασκαλίας που χρησιμοποιήθηκαν ήταν ο βιντεοπροβολέας του εργαστηρίου υπολογιστών, που είχε εγκατεστημένο το λογισμικό geogebra, το φύλλο εργασίας και το τετράδιο εργασιών.

Στην 1^{η} δραστηριότητα του φύλλου εργασίας (βλ.Παράρτημα) ο βασικός στόχος ήταν η κατασκευή του γεωμετρικού τόπου των σημείων της παραβολής απο τα κέντρα των κύκλων που εφάπτονται σε μία ευθεία και σε ένα κύκλο. Αρχικά έγινε αναλυτική περιγραφή για την κατασκευή που προβαλλόταν στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας geogebra (Σχημα 1) και διατυπώθηκε το ζητούμενο. Στο σημείο αυτό χρειάστηκε να τονιστούν και να αποσαφηνιστούν αρκετά απο τα στοιχεία της κατασκευής, κατόπιν ερωτήσεων που τέθηκαν απο τους μαθητές. Οι προσεγγίσεις μέσω κυκλών και ευθειών αποτελούσε αντικείμενο διαπραγμάτευσης, όπου οι μαθητές έρχονταν σε επαφή για πρώτη φορά, με αποτέλεσμα να χρειαστεί χρόνος για την κατανόηση και την εξοικοίωση με τα στοιχεία της κατασκευής.

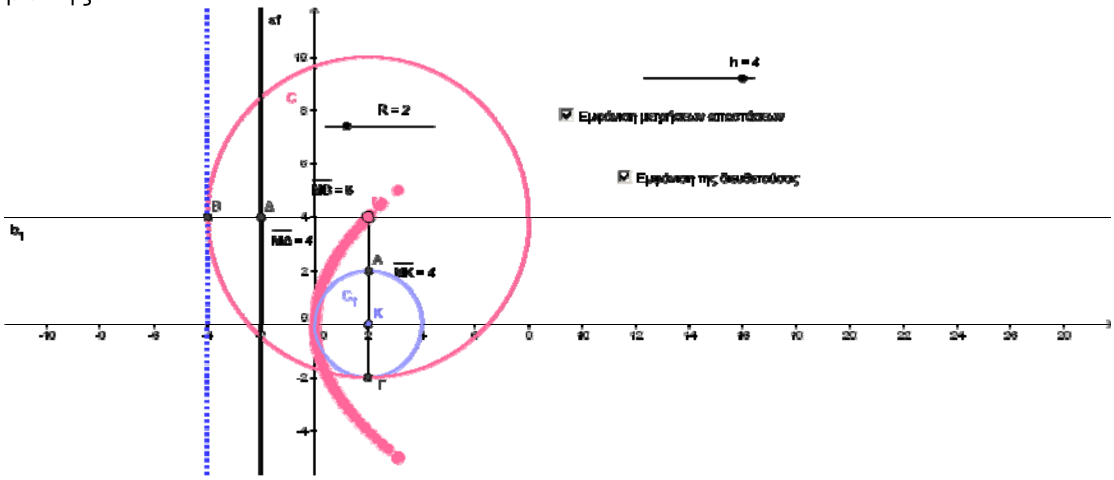
Με βάση τα δεδομένα της κατασκευής και έχοντας σταθεροποίησει τους δρομείς R,h σε κάποιες τιμές, προβλήθηκαν στους μαθητές (σχήμα 1), οι μετρήσεις των μηκών: α) η απόσταση του σημείου Μ (του οποίου ζητείται γ.τ) απο το κέντρο Κ του κύκλου C1 και β) η απόσταση του σημείου Μ απο την ευθεία ε. Στο σημείο αυτό μεταβάλλόταν μέσω του δρομέα και η ακτίνα R, και οι μαθητές παρατήρησαν την μεταβολή των μηκών (ΜΚ) και d(M,b). Οι μαθητές διατύπωσαν την υπόθεση οτι ο ζητούμενος γ.τ είναι παραβολή.



Σχήμα 1: Κύκλος C (M , r) που εφάπτεται εξωτερικά του κύκλου C1στοσημείο Γ και της ευθείας ε στο σημείο Β, με αποτύπωση των μετρήσεων αποστάσεων : MB, MK

Επιπλέον όμως τους ζητήθηκε να εκφραστούν αυτά τα μήκη σε σχέση με τις ακτινες r και R των κύκλων C και C1 αντίστοιχα, προκειμένου να οδηγηθουν και στην απόδειξη του ζητούμενου γ.τ. Ο διάλογος της τάξης οδήγησε στην διατύπωση : (MK)= R-r και d(M , b) = r. Με την ενεργοποίηση του ίχνους του σημείου Μ και την μετακίνηση του σημείου Β αποτυπώθηκε οτι ο γεωμετρικός τόπος (γ.τ) είναι παραβολή με εστία Κ (σχήμα 2).

Όμως απο την κατασκευή , έτσι όπως παρουσιάστηκε ,απουσίαζε το βασικό στοιχείο της ευθείας της διευθετούσας της παραβολής. Οι μαθητές κλήθηκαν να σκεφτούν και να αναλάβουν πρωτοβουλία για το πως θα συμπληρωθεί η γεωμ.κατασκευή με βάση τον ορισμό του γ.τ της παραβολής (τα σημεία της παραβολής έχουν ίσες αποστάσεις απο την εστία και τη διευθετούσα). Η αλληλεπίδραση με τα μέλη της τάξης οδήγησε στην διατύπωση μαθηματικών συλλογισμών και επιχειρημάτων, ώστε να δοθεί η απάντηση για την κατασκευή παράλληλης ευθείας (στο ημιεπίδο που δεν ανήκει το Κ)σε αποσταση R απο την δοσμένη ευθεία b (σχήμα 2). Η δραστηριότητα ολοκληρώθηκε με την γενίκευση των αποτελέσματων για την τελική διατύπωση του συμπεράσματος οτι : ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται σε κύκλο και ευθεία είναι παραβολή με εστία το κέντρο του κύκλου. Επιπλέον τους ζητήθηκε να εκφράσουν και αλγεβρικά την εξίσωση της παραβολής και να αναφέρουν και τις χαρακτηριστικές ιδιότητες της παραβολής.



Σχήμα 2: Κατασκευή του γ.τ των σημείων της παραβολής απο τα κέντρα των κύκλων που εφάπτονται σε κύκλο και ευθεία και προσθήκη της κατασκευής της διευθετούσας b1

Η δραστηριότητα συμπληρώθηκε και με 2 διερευνητικές ερωτήσεις,που αφορούν την μελέτη και την μεταβολή των βασικών χαρακτηριστικών της παραβολής (εστία και διευθετούσα). Συγκεκριμένα οι μαθητές ρωτήθηκαν για το ποιο απο τα χαρακτηριστικά της παραβολής μεταβάλλεται αν μετατοπιστεί το κέντρο Κ κατα μήκος του άξονα χχ΄ή ακτίνα R του κύκλου C. Οι απαντήσεις τους αποτύπωσαν οτι κατανόησαν την επιτυχή προσέγγιση της κωνικής τομής της παραβολής, δηλαδή έγινε απόλυτα σαφές πλέον οτι το κέντρο του κύκλου C καθορίζει την εστία της παραβολής και η ευθεία της διεθετούσας εξαρτάται απο την ακτίνα του R.

Η $2^{η}$ και $3^{η}$ δραστηριότητα του φύλλου εργασίας (βλ. Παράρτημα) υλοποιήθηκαν και διαπραγματεύτηκαν κατά ανάλογο τρόπο. Συνοπτικά η διαδικασία διαπραγματευσης τους ήταν:

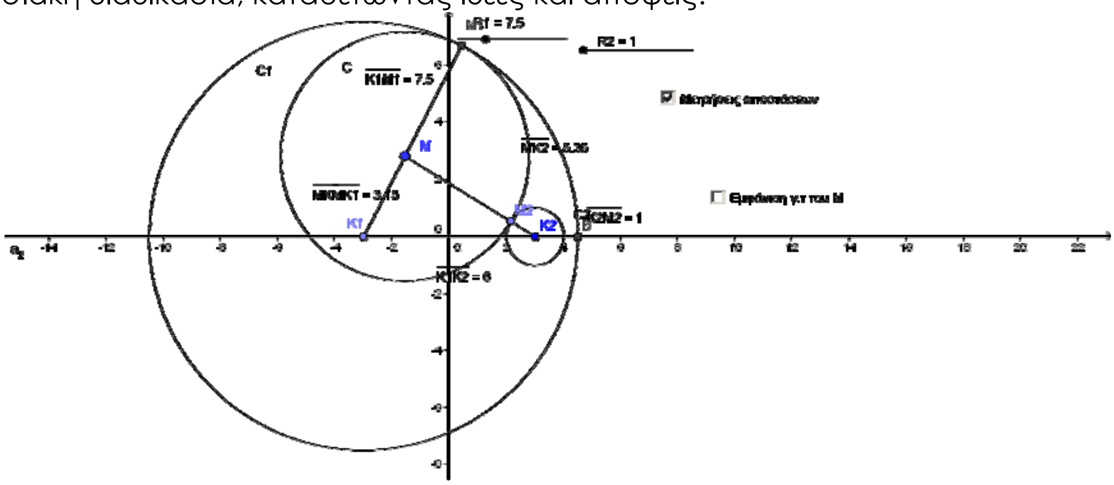
-Περιγραφή κατασκευής με βάση το λογισμικό.

-Μετρήσεις αποστάσεων σημείων και μηκών ευθυγράμμων τμημάτων.
-Διατύπωση Εικασίας-Έλεγχος- απόδειξη της εικασίας μέσα απο την ανταλλαγή απόψεων και την διατύπωση μαθηματικών συλλογισμών,επιχειρημάτων και αιτιολογήσεων, που βασίζονταν στον ορισμό του γ.τ της έλλειψης (δραστηριότητα 2η) και του γ.τ της υπερβολής (δραστηριότητα 3η) .
-Αποτύπωση του γ.τ απο την ενεργοποίηση του ίχνους του σημείου (του οποίου ζητήθηκε ο γ.τ).
-Διερεύνηση των βασικών χαρακτηριστικών των κωνικών τομών μέσα απο την δυναμική μεταβολή του γεωμετρικού σχήματος (μεταβολή ακτινων των δρομέων).
-Διατύπωση συμπεράσματος.
-Εφαρμογή.

Στην 2η δραστηριότητα πρώτα απο όλα οι μαθητές ρωτήθηκαν αν γνωρίζουν την ικανή και αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται μεταξύ των ακτίνων R1, R2 και (K1K2),ωστε ο κύκλος C2 (K2, R2) να βρίσκεται στο εσωτερικό του C1(K1, R1). Με την κατάλληλη καθοδήγηση μου έγινε υπενθύμιση της ιδιότητας των σχετικών θέσεων των δύο κύκλων.Στην συνέχεια , οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν αναλυτικά στο φύλλο εργασίας τις αποστάσεις του M (κέντρο του κύκλου C) απο τα κέντρα K1, K2 των κύκλων C1 και C2 σε συνάρτηση με τις αντίστοιχες ακτίνες τους r, R1,R2:

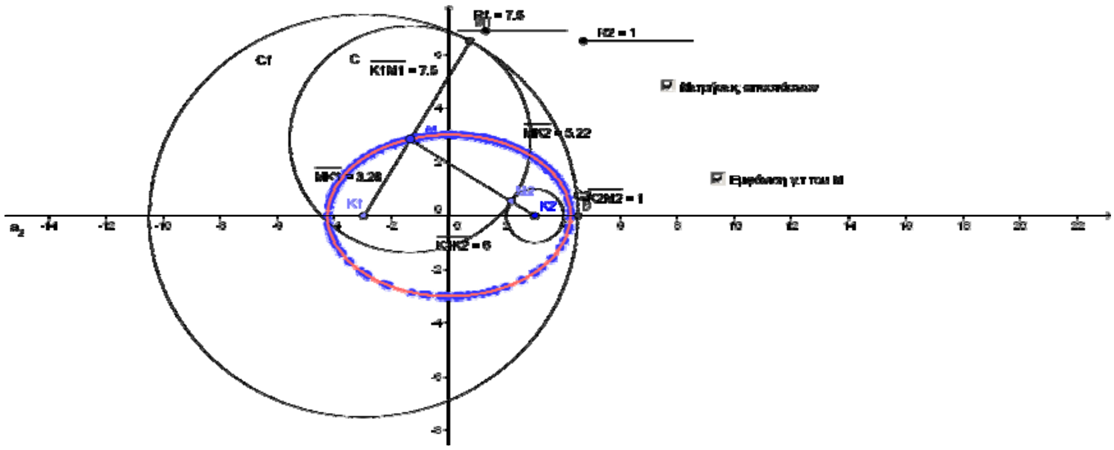
(K1M)+(K2M) = (R1-r)+(R2+r)=R1+R2 και $\left(K1K2\right)=3+3=6$

Οι μαθητές καθοδηγήθηκαν για την απόδειξη και την γενίκευση του συμπεράσματος απο την ερώτηση 2 της 2η δραστηριότητας, όταν κλήθηκαν να συγκρίνουν τις μετρήσεις (K1M)+(K2M) και (K1K2) (σχήμα 3). Στο σημείο αυτό τονίστηκε και έγινε χρήση της αρχικής αναφοράς ότι η ικανή και αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι απόστασεις των κέντρων (K1K2) των δύο κύκλων C1 και C2 με τις αντίστοιχες ακτίνες τους R1 και R2, ώστε ο ένας κυκλος να είναι εσωτερικός του άλλου είναι : (K1K2)< R1-R2. Έτσι μέσα απο τον διάλογο στην τάξη διατυπώθηκε ως αιτιολόγηση οτι και R1+R2>R1-R2>(K1K2), δηλαδή (K1M)+(K2M) > (K1K2). Ταυτόχρονα στο λογισμικό αποτυπώνονταν και αποστάσεις των μηκών ,ενω οι ακτίνες R1 και R2 μεταβάλλονταν (σχημα 3). Μέσα απο την υλοποίηση μίας τέτοιας διερεύνησης παρατηρήθηκε οτι οι μαθητές βρίσκονταν σε εγρήγορση με το ενδιαφέρον τους παρέμενε αμείωτο, ενώ όλοι προσπαθούσαν να ενταχθούν στην μαθησιακή διαδικασία, καταθέτωντας ιδέες και απόψεις.



Σχήμα 3: Αποτύπωση των μετρήσεων των αποστάσεων (K1M), (K2M) , (K1K2) ,R1, R2 για την διατύπωση της ικανής και αναγκαίας συνθήκης των σχετικών θέσεων των κύκλων

Στη συνέχεια ενεργοποιήθηκε το ίχνος Μ , αποτυπώθηκε ο ζητούμενος γ.τ (σχήμα 4) και τεκμηριώθηκε η εικασία των μαθητών οτι ο γ.τ των κέντρων των κύκλων είναι έλλειψη με εστίες τα κέντρα Κ1, Κ2 των δύο κύκλων C1, C2 αντίστοιχα (εστιακή απόσταση=2γ=(Κ1Κ2)), μήκος μεγάλου άξονα=2 α= R1+R2 (το άθροισμα των ακτίνων των δύο κύκλων C1, C2 αντίστοιχα)



Σχήμα 4: Αποτυπωση του γ.τ των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά για την κατασκευή του γ.τ των σημείων της έλλειψης

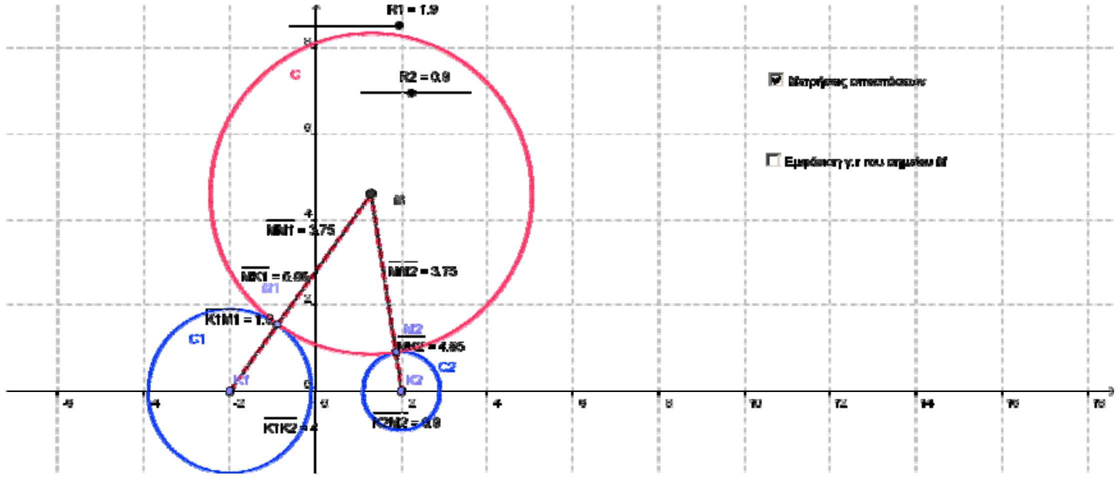
Συμπληρωματικά κατά την υλοποίηση της δραστηριότητας ,με βάση τα πλεονεκτήματα που διαθέτει το λογισμικό geogebra , ήταν δυνατόν να μεταβληθεί δυναμικά το γεωμετρικό σχήμα μεταβάλλοντας R1, R2 ή μετατοπίζοντας Κ1, Κ2. Αυτό έδωσε την δυνατότητα να αξιολογηθεί η κατανόηση και η εμπέδωση της κατασκευής του γεωμετρικού τόπου της έλλειψης μέσω δύο ερωτήσεων που τέθηκαν προς διερεύνηση. Συγκεκριμένα ζητήθηκε απο τους μαθητές να απαντήσουν ποιο απο τα χαρακτηριστικά της κωνικής τομής μεταβάλλεται αν μεταβληθούν τα κέντρα Κ1, Κ2 ή οι ακτίνες των δύο κύκλων. Στις απαντήσεις τους αποτύπωσαν ότι i) η εστιακή απόσταση εξαρτάται και είναι ίση με την απόσταση των Κ1, Κ2 ii) το μήκος του μεγαλου άξονα εξαρτάται και είναι ίσο με το άθροισμα των ακτίνων R1,R2.

Στην 3η δραστηριότητα (βλ.φύλλο εργασίας στο Παράρτημα) οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν αναλυτικά στο φύλλο εργασίας τις αποστάσεις του Μ (κέντρο του κύκλου C) απο τα κέντρα Κ1 , Κ2 των κύκλων C1 και C2 σε συνάρτηση με τις αντίστοιχες ακτίνες τους r, R1,R2. καθώς και την απόσταση των κεντρων (Κ1Κ2) των C1,C2 (σχήμα 5):

$$\left|(\mathrm{K1M})-(\mathrm{K2M})\right| = \left|\left(R1+r\right)-\left(R2+r\right)\right| = \left|R1-R2\right| \text{ και } \left(K1K2\right)=4 .$$

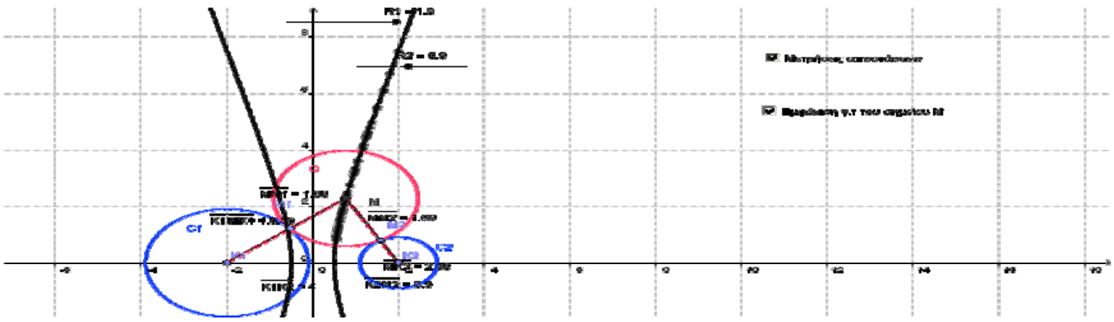
Οι μαθητές και πάλι καθοδηγήθηκαν να συγκρίνουν $\left|(\mathrm{K1M})-(\mathrm{K2M})\right|$ και (Κ1Κ2).Ο ορισμός του γ.τ της υπερβολής και η ικανή και αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι απόστασεις των κέντρων (Κ1Κ2) των δύο κύκλων C1 και C2 με τις αντίστοιχες ακτίνες τους R1 και R2, ώστε ο ένας κυκλος να είναι εξωτερικός του άλλου χρησιμοποιήθηκε ως αιτιολόγηση για την εξαγωγή του συμπεράσματος. Η αλληλεπίδραση στην τάξη έδωσε ως απόδειξη:

$$|R1-R2| < R1+R2 < 4 = (K1K2) \quad (1) \text{ ή}$$
$$|(MK1)-(MK2)| < (K1K2)$$



Σχήμα 5: Αποτύπωση των μετρήσεων των αποστάσεων (ΜΚ1), (ΜΚ2), (ΚΙΚ2) , R1, R2 για την διερεύνηση των σχετικών θέσεων των κύκλων

Οι έλεγχοι των συγκρίσεων και η αιτιολόγηση της (1) τεκμηρίωσε οτι ο γ.τ των κέντρων των κύκλων είναι υπερβολή (σχήμα 6) με εστίες τα κέντρα Κ1, Κ2 των δύο κύκλων C1, C2 αντίστοιχα (εστιακή απόσταση=2γ=(Κ1Κ2)), απόσταση των κέντρων της = $|R1-R2|$= 2 α= (την απόλυτη τιμή της διαφοράς των ακτίνων των δύο κύκλων C1, C2 αντίστοιχα). Πριν την τελική διατύπωση του συμπεράσματος και με βάση τις ιδιότητες που διαθέτει το λογισμικό προηγήθηκε ενεργοποίηση του ίχνους Μ για την αποτύπωση της αναπαράστασης του γ.τ.



Σχήμα 6: Η αποτύπωση της κατασκευής του γ.τ των σημείων της υπερβολής

Κατά ανάλογο τρόπο για την αφομοίωση της γεωμετρικής κατασκευής του γ. τ της υπερβολής, δόθηκαν και και δύο διερευνητικές ερωτήσεις που μπορούσαν να απαντηθούν με βάση των πολλαπλών μετρήσεων και αναπαραστασεων του γεωμετρικού σχήματος του λογισμικού geogebra Οι μαθητές ανταποκρίθηκαν με ευχέρεια στην ερώτηση : Αν μεταβληθεί η ακτίνα R1 ή R2 ή αν μετατοπιστούν τα κέντρα των κύκλων Κ1, Κ2 ποιο απο τα χαρακτηριστικά του γ.τ μεταβάλλεται σε κάθε περίπτωση.

Τέλος, στη 2η -3η δραστηριότητα για την πλήρη κατανόηση της προσέγγισης των γ.τ των κωνικών τομών όπως παρουσιάζονται μέσα απο τους γ.τ των κέντρων κύκλων που εφάπτονται σε δύο κύκλους (που βρίσκονται ο ένας στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό του άλλου) δόθηκαν και δύο εφαρμογές ως εργασία για το σπίτι. Οι μαθητές καλούνται να συνδέσουν την Άλγεβρα και την γεωμετρία για να διατυπωθούν οι αλγεβρικές εξισώσεις των κωνικών τομών της έλλειψης και της υπερβολής, τα χαρακτηριστικά τους στοιχεία και οι ιδιοτητές τους.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Διαπιστώθηκε οι δραστηριότητες των φύλλων εργασίας που υλοποιήθηκαν, με την εισαγωγή δρομέων για την μετατόπιση των κέντρων των κύκλων, έδινε μία πολυπλόκοτητα και δυσκολία στην άμεση αντίληψη της κατασκευής του λογισμικού. Στην φάση αυτή δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στις δικές μου παρεμβάσεις και θεωρώ οτι αυτές διευκόλυναν τον διάλογο και την αλληλεπίδραση στην τάξη σε συνδυασμό με την προσθήκη διερευνητικών ερωτήσεων για το ποια απο τα χαρακτηριστικά των κωνικών τομών μεταβάλλονται, αν μετατοπιστούν τα κέντρα των κύκλων, Κατά αυτό το τρόπο εξασφαλίστηκε, ως ένα μεγάλο βαθμό, η διασαφήνιση των στοιχείων της κατασκευης των γ.τ των κωνικών τομών με την προβολή πολλαπλών αναπαραστάσεων των σχετικών θέσεων των κύκλων, με απώτερο αποτέλεσμα την πλήρη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και την επίτευξη των γνωστικών στόχων που είχαν τεθεί.

Η υλοποίηση της διδασκαλίας πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του προβλεπόμενου διδακτικού χρόνου. Η χρήση του μαθηματικού λογισμικού goegebra ήταν καθοριστικής σημασίας για την υλοποίηση των δραστηριοτήτων, καθώς δόθηκε η δυνατότητα για πολλαπλές μετρήσεις, μετασχηματισμούς των γεωμετρικών σχημάτων στην οθόνη του υπολογιστή και πολλαπλές αναπαραστάσεις, ώστε οι μαθητές μέσα απο την διερεύνηση και τον πειραματισμό να εξάγουν συμπεράσματα και κανόνες. Τέλος, μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας διαπιστώθηκε, μέσα απο τις διερευνητικές ερωτήσεις και τις απαντήσεις που δόθηκαν από τους μαθητές στις ζητουμενες εφαρμογές, οτι επιτεύχθηκαν οι γνωστικοί στόχοι που είχαν τεθεί για την επανάληψη των γ.τ των κωνικών τομών, των ιδιοτήτων και των χαρακτηριστικών τους. Επιπλέον η διαφορετική προσέγγιση με την βοήθεια του λογισμικού geogebra, κινητοποίησε το ενδιαφέρον των μαθητών ,ενεργοποίησε τον διάλογο και την ανταλλαγή απόψεων, καθώς οι περισσότεροι μαθητές διατύπωσαν υποθέσεις που προσπάθησαν να τεκμηριώσουν με μαθηματικά επιχειρήματα και συλλογισμούς.

ΕΠΕΚΤΑΣΗ

Η παραπάνω διδασκαλία μπορεί να επεκταθεί περαιτέρω και στην υλοποίηση συνθετικής εργασίας για το Απολλώνιο Πρόβλημα : «να γραφεί κύκλος που να εφάπτεται σε τρεις δεδομένους κύκλους», λύθηκε από τον μεγάλο μαθηματικό της αρχαιότητας Απολλώνιο τον Πέργαμο και αποτελεί την τελική διατύπωση μίας σειρά επί μέρους προβλημάτων, των οποίων η επίλυση οδηγεί σταδιακά στην λύση του. Η γενικότερη διατύπωση των επιμέρους προβλημάτων είναι : «Να γραφεί κύκλος που εφάπτεται σε τρία αντικείμενα.». Τα αντικείμενα αυτά μπορεί να είναι κύκλος, σημείο, ευθεία, έτσι προκύπτουν συνολικά 10 επιμέρους προβλήματα. Η διδασκαλία των παραπάνω δραστηριοτήτων μπορεί να επεκταθεί και να δόσει λύση στα 10 επιμέρους προβλήματα.Αναφέρεται ενδεικτικά :

Προβλημα 1 :Να κατασκευαστεί κύκλος που να εφάπτεται δυο γνωστών ευθειών (m),(n) και γνωστού κύκλου (c).

Απάντηση: Ο γ.τ των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται στον c και την ευθεία m είναι παραβολή Π1. Ο γ.τ των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται στον c και την ευθεία η είναι παραβολή Π2. Επομένως, η λύση του προβλήματος 1 είναι κύκλος, με κέντρα τα σημεία τομής δυο παραβολών Π1,Π2.

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ

Η υλοποίηση της παραπάνω διδασκαλίας υλοποιήθηκε στο 2ο Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Αθηνών κατά το σχολικό έτος 2012-2013,στα πλαίσια δειγματικών διδασκαλιών και αξιολογήθηκε απο τον σχολικό σύμβουλο Α΄Αθήνας: κ. Κοσσυβα Γ.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Αδαμόπουλος, Λ., Βισκαδουρακης, Β., Γαβαλάς, Δ., Πολύζος, Γ. & Σβέρκος, Α. (2010). *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Β' τάξης Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων (ΙΤΥΕ) ‘Διόφαντος’.

Αργύρη, Π., (2010).*Οι πεποιθήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών για την απόδειξη στη Γεωμετρία* (διπλωματική εργασία στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών): 107-110. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών,Αθήνα.

Βοσνιάδου, Σ., (2001). *‘Πως μαθαίνουν οι μαθητές’*.Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης (ΜΙΘΕ).

Κοντογεώργος Δ. & Μαραγκός Κ. (2001). *Αξιολόγηση Εκπαιδευτικού λογισμικού*. Εργαστήριο Εκπαιδευτικής και Γλωσσικής Τεχνολογίας.Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών. Πανεπιστήμιο Αθηνών.

ΙΤΥ(2010). *Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης*. Τεύχος 4: Κλάδος ΠΕ03, Β΄ έκδοση Αναθεωρημένη & Εμπλουτισμένη. Πάτρα: ΙΤΥ

ΙΤΥ(2010). *Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης*. Τεύχος 1: Γενικό Μέρος, Α΄ έκδοση. Πάτρα: ΙΤΥ

Markus H., mhohen@math.fau.edu, Judith P., jpreiner@math.fau.edu, GeoGebra Website: www.geogebra.org, Οδηγός Βοήθειας για το Geogebra 3.0, Μετάφραση του αρχείου Βοήθειας στα Ελληνικά Φεργαδιώτης,Αθήνα (2007).

Hadas, N., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. B. (2000) The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 44*: 127-150.

Jones, K. (2000) Providing a Foundation for Deductive Reasoning: students' interpretations when using Dynamic Geometry Software and Their Evolving Mathematical Explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2): 55-85.

Schwartz, J. L. & Yerushalmy, M. (1987) The Geometric Supposer: A case study in the use of microcomputers in mathematics education. In Bishop, J. Lochhead, J. & Perkins,D.N. Thinking. Erlbaum, Hillsdale, NJ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β Λυκείου

Επανάληψη των κωνικών τομών : παραβολή, έλλειψη, υπερβολή(Άσκηση10 σχολικό βιβλίο σελ.131)

Δραστηριότητα 1η

Έστω ευθεία b: χ= -4, κύκλος C1 (K,R) με K (2, 0), ακτίνα R που μεταβάλλεται, σημείο B(-4 ,h).

O κύκλος C (M , r) εφάπτεται εξωτερικά του κύκλου C1 και της ευθείας ε.

A είναι το σημείο επαφής του κύκλου C1 και του κύκλου C

B είναι σημείο επαφής της ευθείας b και του κύκλου C.

Ζητείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι εφάπτονται στην ευθεία b και στο κύκλο C1.

1.Οι αποστάσεις (ΜΚ) και d(M,d) σε συνάρτηση με τις ακτίνες R και r των κύκλων C1 και C αντίστοιχα είναι :

(ΜΚ)=…………………………… και d(M,d)=..

2. Το ίχνος του σημείου Μ ενεργοποιείται και ο δρομέας h μεταβάλλεται , ώστε το σημείο Β να μετατοπίζεται κατακόρυφα κατά μήκος της ευθείας b. Τι παρατηρείτε;

3.Ποιο απο τα χαρακτηριστικά της κωνικής τομής λείπει ; Πως θα συμπληρωθεί η κατασκευή.

....

4.Να διατυπωθεί το συμπέρασμα σας για τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται σε κύκλο και ευθεία και να γραφτεί και η εξίσωση του

....

Δραστηριότητα 2η

Έστω κύκλος C1 (K1,R1) , με K1(-3,0) σημείο και ακτίνα R1 που μεταβάλλεται

Έστω κύκλος C2 (K2,R2) που βρίσκεται στο εσωτερικό του C1, με K2(3, 0) και ακτίνα R2 που μεταβάλλεται.

O κύκλος C με κέντρο (M , r) εφάπτεται του κύκλου C1 και του κύκλου C2.

M1 είναι το σημείο επαφής του κύκλου C1 και του κύκλου C

M2 είναι σημείο επαφής της ευθείας C2 και του κύκλου C.

Ζητείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων , οι οποίοι εφάπτονται στον κύκλο C1 και στον κύκλο C2.

Υπενθύμιση Η ικανή και αναγκαία συνθήκη που αρκεί να ικανοποιούν οι απόσταση των κέντρων (Κ1Κ2) των δύο κύκλων C1 και C2 με τις αντίστοιχες ακτίνες τους R1 και R2, ώστε ο ένας κυκλος να είναι εσωτερικός του άλλου.

(K1K2)< R1-R2)

1. Όταν μεταβάλλονται οι τιμές των R1,R2, ποια ικανή και αναγκαία συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται ,ώστε ένας κύκλος να βρίσκεται στο εσωτερικό του άλλου ;

....

2.Με βάση τα δεδομένα της παραπάνω κατασκευής, να συμπληρώσετε τις μετρήσεις των παρακάτω μηκών, σε συνάρτηση με τις ακτίνες των τριών κύκλων R1, R2 , r και τις συντεταγμένες των κέντρων των δύο κύκλων:

(K1M1)=……………………… (MM1)=…………………………..

(K1M)=………………………………

(K2M2)=………………………… (MM2)=…………………………..

(K2M)=………………………………

(K1M)+(K2M)=...........................

3. Να συγκρίνεται το άθροισμα των αποστάσεων Μ (κέντρο του C) απο τα Κ1, Κ2 με την απόσταση (Κ1Κ2) (αποστάσεις των κέντρων των C1, C2 αντίστοιχα)

(K1M)+(K2M) …………………(K1K2)

4.Ενεργοποιώντας το ίχνος του σημείου Μ , να μετακινήσετε το σημείο Μ2 . Τι παρατηρείτε ;
5.Να διατυπωθεί το συμπέρασμα σας , να αναφέρεται τα χαρακτηριστικά στοιχεία της κωνικής τομής και να γράψετε την εξίσωση της:

....

Εφαρμογή (εργασία)

Έστω κύκλος C1 με κέντρο : Κ1(-4,0) και ακτίνα R1=12
Έστω κύκλος C2 ,ο οποίος είναι εσωτερικός του C1, με κέντρο : Κ2(4,0) και ακτίνα R2=2.
Ο κύκλος C με κέντρο (Μ , r) εφάπτεται του κύκλου C1 και του κύκλου C2.
Να γράψετε την ***εξίσωση*** του γεωμετρικού τόπου του κέντρου του κύκλου C , ο οποίος εφάπτεται στον κύκλο C1 και στον κύκλο C2, ***να αναφέρεται τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες του.***

....

....

Δραστηριότητα 3η

Έστω κύκλος C1 (Κ1,R1) , όπου Κ1(-2,0) σημείο του άξονα χχ΄και ακτίνα R1 που μεταβάλλεται.
Έστω κύκλος C2 (Κ2,R2) , που βρίσκεται στο εξωτερικό του C1 , με Κ2(2,0) και ακτίνα R2 που μεταβάλλεται.
Ο κύκλος C με κέντρο (Μ , r) εφάπτεται του κύκλου C1 και του κύκλου C2.
Μ1 είναι το σημείο επαφής του κύκλου C1 και του κύκλου C
Μ2 είναι σημείο επαφής της ευθείας C2 και του κύκλου C.
Ζητείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων , οι οποίοι εφάπτονται στον κύκλο C1 και στον κύκλο C2.
(Υπενθύμιση Η ικανή και αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η απόσταση των κέντρων (Κ1Κ2) των δύο κύκλων C1 και C2 σε εχέση με τις αντίστοιχες ακτίνες τους R1 και R2,ώστε οι κύκλοι να βρίσκονται ο ένας εκτός του άλλου.
(Κ1Κ2)> R1+R2)
1.Με βάση τα δεδομένα της παραπάνω κατασκευής, να συμπληρώσετε τις μετρήσεις των παρακάτω μηκών, σε συνάρτηση με τις ακτίνες R1, R2 , r των τριών κύκλων C1, C2, C :

(Κ1Μ1)=……………………… (ΜΜ1)=…………………………..
(Κ1Μ)=………………………………
(Κ2Μ2)=………………………… (ΜΜ2)=…………………………..
(Κ2Μ)=………………………………
$|(K1M)\text{-}(K2M)|$ = ………….........
(Κ1Κ2)=..

2.Να συγκρίνεται την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων Μ (κέντρο του C) απο τα Κ1, Κ2 με την απόσταση (Κ1Κ2) (αποστάσεις των κέντρων των C1, C2 αντίστοιχα)
$|(K1M)\text{-}(K2M)|$ ....(Κ1Κ2)
3. Ενεργοποιώντας το ίχνος του σημείου Μ, να μετακινήσετε το σημείο Μ2. Τι παρατηρείτε ;
4. Να διατυπωθεί το συμπέρασμα σας, αναφέροντας τα χαρακτηριστικά στοιχεία της κωνικής τομής:

....

Εφαρμογή (εργασία)

Έστω οτι ο κύκλος C1 έχει κέντρο ένα σταθερό σημείο Κ1 του άξονα χχ΄ : Κ1(-4,0) και ακτίνα R1=4

Έστω κύκλος C2 ,ο οποίος είναι εξωτερικός του C1, με κέντρο ένα σταθερό σημείο K2 του άξονα χχ' : K2(4,0) και ακτίνα R2=1
Ο κύκλος C (M , r) εφάπτεται του κύκλου C1 και του κύκλου C2
Να γράψετε την ***εξίσωση*** του γεωμετρικού τόπου του κέντρου M του κύκλου, ο οποίος εφάπτεται στον κύκλο C1 και στον κύκλο C2, να αναφέρεται τα χαρακτηριστικά στοιχεία και τις ιδιότητες του γεωμετρικού τόπου

....