Η ισότητα τριγώνων μέσω της μεθόδου της υπέρθεσης, αντιπαραδειγμάτων και χρήσης Δυναμικής Γεωμετρίας

Κωστόπουλος Γεώργιος

Καθηγητής Μαθηματικών Β΄θμιας Εκπαίδευσης
kostg@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ισότητα τριγώνων αποτελεί βασικό αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο, αποτελώντας προέκταση της ισότητας ευθυγράμμων σχημάτων και μια πρώτη εισαγωγή στη μαθηματική αποδεικτική διαδικασία. Η έννοια της ισότητας ορίστηκε αξιωματικά από τον Ευκλείδη στα στοιχεία (βιβλίο 1, πρόταση Ι.4). Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της υπέρθεσης, δηλαδή της μετατόπισης και σύμπτωσης των τριγώνων θεωρώντας ότι αυτά παραμένουν αναλλοίωτα κατά την μετατόπισή τους, αποδεικνύει τα κριτήρια ισότητας Π-Γ-Π (πρόταση Ι.4) και Π-Π-Π (πρόταση Ι.8).

Στη συγκεκριμένη εργασία θα περιγραφεί μια διδακτική παρέμβαση ως προς την ισότητα τριγώνων σε μαθητές Γ' τάξης Γυμνασίου με χρήση ΤΠΕ, η οποία στηρίζεται εν μέρει στη μέθοδο της υπέρθεσης αλλά και σε αντιπαραδείγματα. Η προτεινόμενη διδακτική παρέμβαση υλοποιείται με τη χρήση του λογισμικού Geogebra, το οποίο είναι ένα λογισμικό Δυναμικών Μαθηματικών, παρέχοντας δυνατότητες λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας με ενσωματωμένα χαρακτηριστικά λογισμικών CAS (Computer Algebra System). Το περιβάλλον εργασίας στο λογισμικό Geogebra προσομοιώνει την αξιωματική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και από αυτή την άποψη θεωρείται κατάλληλο εργαλείο για τη διδασκαλία της στη μέση εκπαίδευση. Θα περιγραφούν αναλυτικά ο σχεδιασμός της παρέμβασης, καθώς και οι προτεινόμενες δραστηριότητες για την επιτυχή υλοποίησή της.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *ισότητα τριγώνων, υπέρθεση, Δυναμική Γεωμετρία*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Γεωμετρία αποτελεί αναπόσπαστο μέρος των μαθηματικών. Η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι σημαντική για τους μαθητές από τα πρώτα χρόνια του μαθητικού τους βίου. Τα παιδιά πρέπει να ενθαρρύνονται να μελετούν απλά γεωμετρικά σχήματα και να εξερευνούν τις ιδιότητες τους. Αρχικά, η προσέγγιση της Γεωμετρίας από τους μαθητές θα πρέπει να είναι εύληπτη και διερευνητική, ενώ στη συνέχεια περισσότερο συστηματική, με εμβάθυνση σε σύνθετες γεωμετρικές δραστηριότητες και κατασκευές (Hansen, 1998).

Σύμφωνα με τον Duval (1998), μια γεωμετρική δραστηριότητα περιλαμβάνει τρία είδη γνωστικών διαδικασιών, οι οποίες πληρούν συγκεκριμένες επιστημολογικές λειτουργίες:

- Διαδικασίες απεικόνισης
- Διαδικασίες κατασκευής από εργαλεία

- Διαδικασίες αιτιολόγησης

Έρευνες σχετικά με την κατανόηση γεωμετρικών εννοιών από μαθητές, έχουν δείξει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να δουν με ένα δυναμικό τρόπο τα σχήματα, να φανταστούν τα σχήματα να περιστρέφονται, τις ημιευθείες και τις ευθείες να προεκτείνονται κ.ά. (Π.Ι, 2011). Οι δυσκολίες αυτές οφείλονται κυρίως στα στατικά σχήματα, τα οποία σχεδιάζουμε στο χαρτί ή τον πίνακα, στον τρόπο προσανατολισμού των σχημάτων στα σχολικά βιβλία (ορθογώνια ή τετράγωνα με πλευρές παράλληλες προς τις ακμές των σελίδων του βιβλίου), στις παραστάσεις που έχουν οι μαθητές από το περιβάλλον γύρω τους (οριζόντιος και κατακόρυφος προσανατολισμός αντικειμένων στο σπίτι), αλλά και στον τρόπο προσανατολισμού των σχημάτων στον πίνακα, κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας (Π.Ι, 2011).

Επιπρόσθετα, κατά τη διδασκαλία της Γεωμετρίας αναπτύσσεται από τον εκπαιδευτικό μια ειδική ορολογία για την περιγραφή των γεωμετρικών εννοιών, η οποία προκαλεί δυσκολίες στην κατανόηση των εννοιών αυτών από τους περισσότερους μαθητές. Συνάμα, η μέθοδος διδασκαλίας που επιλέγει ο εκπαιδευτικός για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας κατέχει σημαντικό ρόλο στην κατανόηση εννοιών από τους μαθητές (Clements & Battista, 1992). Θα πρέπει ο διδάσκων, λαμβάνοντας υπόψη αυτούς τους παράγοντες, να εμπλουτίζει την ποικιλία των σχημάτων που χρησιμοποιεί κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.

Όσον αφορά στην ισότητα τριγώνων, οι μαθητές εμφανίζουν συχνά τις εξής παρανοήσεις (CK-12 Foundation, 2009):

- Όταν ίσα τρίγωνα εμφανίζονται με διαφορετικό προσανατολισμό σε ένα σχέδιο, πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι με κατάλληλη περιστροφή των τριγώνων είναι δυνατόν να ταυτιστούν οι πλευρές και οι γωνίες τους. Σε αυτό μπορεί να βοηθήσει η χρήση του λογισμικού, αφού επιτρέπει δυναμικά την περιστροφή και μετατόπιση των σχημάτων, αφήνοντας τα σχήματα αναλλοίωτα. Δίνοντας διάφορα ζεύγη τριγώνων, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να πειραματιστούν και να διερευνήσουν με κατάλληλες μετατοπίσεις εάν είναι ίσα.
- Ο ορισμός της ισότητας δύο τριγώνων απαιτεί την ισότητα έξι στοιχείων, τρία ζεύγη πλευρών και τρία ζεύγη γωνιών. Εάν οι μαθητές κατανοήσουν ότι αυτό αποτελεί αρκετά δύσκολη προϋπόθεση για να προκύψουν ίσα τρίγωνα σε μια δραστηριότητα, ίσως προσπαθήσουν να διερευνήσουν και τελικά να καταλήξουν στα γνωστά κριτήρια ισότητας τριγώνων, τα οποία απαιτούν την ισότητα λιγότερων στοιχείων τους.
- Αρκετοί μαθητές πιστεύουν ενστικτωδώς, ότι εάν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προς μια είναι ίσα. Ζητώντας από κάθε μαθητή να σχεδιάσει τρίγωνα με συγκεκριμένα μέτρα γωνιών, π.χ. 40^{o}, 60^{o} και 80^{o} ή ισόπλευρα τρίγωνα με διαφορετικά μήκη πλευρών, είναι δυνατόν να διαπιστώσουν, συγκρίνοντας τα σχήματά τους, ότι δύο ισογώνια τρίγωνα δεν είναι πάντοτε ίσα, αφού έχουν αναμφίβολα διαφορετικά μήκη πλευρών.

Η διδασκαλία με χρήση Νέων Τεχνολογιών είναι δυνατόν να συμβάλει στην άρση των δυσκολιών που παρουσιάζονται κατά τη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Η χρήση και ενσωμάτωση των ΤΠΕ στην εκπαίδευση έχει αλλάξει τη μέθοδο διδασκαλίας και τους τρόπους μάθησης των μαθητών, προσφέροντας περιβάλλοντα μάθησης, τα οποία ενισχύουν την ενεργητική, συνεργατική και δημιουργική μάθηση σε σχέση με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας (Mikre, 2011). Επιπλέον, η αλληλεπίδραση με τον υπολογιστή και η ποικιλία των ερεθισμάτων βοηθούν, αφενός στο να δραστηριοποιείται ο νους του μαθητή, αφετέρου στο να παίρνει ο ίδιος πρωτοβουλίες και να αυτενεργεί (Ράπτης & Ράπτη, 1998).

ΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ

Η διδακτική παρέμβαση θα πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra. Είναι ένα ελεύθερο λογισμικό Δυναμικών Μαθηματικών για την εκμάθηση και τη διδασκαλία των θετικών επιστημών, ανεξάρτητο από τη χρησιμοποιούμενη πλατφόρμα αφού είναι γραμμένο σε γλώσσα Java, το οποίο συνδυάζει σε ένα ενιαίο και εύχρηστο πακέτο γεωμετρία, άλγεβρα, λογιστικά φύλλα, στατιστική και ανάλυση. Παρέχοντας χαρακτηριστικά και δυνατότητες λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας παράλληλα με λογισμικά αλγεβρικών ψηφιακών συστημάτων (CAS), αποτελεί ένα ευέλικτο εργαλείο στα χέρια εκπαιδευτικών και μαθητών για τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών σε Γυμνάσιο και Λύκειο.

Ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να εισάγει σημεία, ευθύγραμμα τμήματα, ευθείες, πολύγωνα, διανύσματα κ.ά. και στη συνέχεια να τα τροποποιήσει δυναμικά. Η δυνατότητα της άμεσης εναλλαγής μεταξύ των παραθύρων της Γεωμετρίας και της Άλγεβρας, δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να μεταβάλλει δυναμικά σχήματα και να παρατηρήσει τις αλλαγές των αντίστοιχων συντεταγμένων και εξισώσεων στο παράθυρο της Άλγεβρας, αλλά και αντίστροφα, έχει τη δυνατότητα να μεταβάλλει στο παράθυρο της Άλγεβρας εξισώσεις γραμμών, συντεταγμένες σημείων, μέτρα γωνιών κ.ά., και άμεσα να παρατηρήσει την αντίστοιχη μεταβολή των σχημάτων στο παράθυρο της Γεωμετρίας (Hohenwarter & Jones, 2007).

Το λογισμικό Geogebra ενισχύει τη διερευνητική και ενεργητική μάθηση, προκαλώντας και διατηρώντας το ενδιαφέρον των μαθητών. Ο μαθητής μπορεί να δημιουργήσει γεωμετρικές κατασκευές και στη συνέχεια να παρατηρήσει τις μεταβολές στο γεωμετρικό αντικείμενο που δημιούργησε, μετακινώντας με το ποντίκι κάποιο σημείο. Έτσι, έχει τη δυνατότητα να πειραματιστεί αυτενεργώντας και διερευνώντας, καταλήγοντας ενδεχομένως σε συμπεράσματα και διατυπώνοντας κανόνες και προτάσεις. Ο μαθητής «*έχοντας επαληθεύσει μια πρόταση ή ένα θεώρημα σε αρκετές συγκεκριμένες περιπτώσεις, μπορεί να συμπεράνει επαγωγικά την ισχύ του με αδιάσειστα πλέον στοιχεία. Η επαγωγική φάση ξεπερνά την αρχική του εικασία και του παρέχει μια ισχυρή εμπιστοσύνη όσον αφορά στην ισχύ του θεωρήματος. Χωρίς αυτή την εμπιστοσύνη, σπάνια θα είχε βρει το θάρρος να προχωρήσει στην απόδειξη του θεωρήματος. Όταν ικανοποιείσαι ότι το θεώρημα αληθεύει, τότε μπορείς να αρχίσεις την απόδειξη του*» (Polya, 1954).

ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Η διδακτική παρέμβαση αφορά στην ισότητα τριγώνων και εντάσσεται στο αναλυτικό πρόγραμμα της Γ΄ Γυμνασίου, σύμφωνα με το ΕΠΠΣ και τις οδηγίες του Υπουργείου Παιδείας για τη διδασκαλία των θετικών μαθημάτων του Γυμνασίου, κατά το σχολικό έτος 2013-14. Ο χρόνος, που μάλλον θα απαιτηθεί για την πραγματοποίηση της διδακτικής παρέμβασης, είναι 3 διδακτικές ώρες.

Οι μαθητές έχουν γνωρίσει στις προηγούμενες τάξεις του Γυμνασίου τις βασικές γεωμετρικές έννοιες (σημείο, ευθύγραμμο τμήμα, ευθεία, γωνία, επίπεδο, κύκλος, ευθύγραμμα σχήματα), έχουν εξασκηθεί στο σχεδιασμό γωνιών, ευθυγράμμων σχημάτων και κύκλων με κανόνα και διαβήτη και έχουν μάθει να διενεργούν μεταφορές, μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις. Επίσης, έχουν μάθει ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα αν συμπίπτουν, όταν τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο και έχουν διερευνήσει τις συνθήκες κατασκευής ενός τριγώνου όταν δίνονται τρία ευθύγραμμα τμήματα. Η έννοια της σύμπτωσης γεωμετρικών σχημάτων αναφέρεται στην πλήρη ταύτιση των στοιχείων τους, η οποία επιτυγχάνεται μετά από σκόπιμα κατάλληλη μετακίνησή τους, κατά την οποία παραμένουν αναλλοίωτα.

Ένα λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας, όπως το Geogebra, αφήνει αναλλοίωτα τα σχήματα κατά τη διαδικασία του συρσίματος και της μετακίνησή τους, ενώ συγχρόνως αυτά διατηρούν τις αρχικές τους ιδιότητες. Ο Ευκλείδης στα στοιχεία του αναφέρει και αποδεικνύει θεωρήματα, αξιοποιώντας τη μέθοδο της υπέρθεσης ή επίθεσης. Ο Αλεξανδρινός μαθηματικός δέχτηκε ότι τα τρίγωνα παραμένουν αμετάβλητα κατά την μετατόπισή τους και χρησιμοποίησε τη μέθοδο της υπέρθεσης (μόνο τρεις φορές), για να αποδείξει το πρώτο του θεώρημα, δηλαδή την πρόταση I.4 (κριτήριο Π-Γ-Π), την πρόταση I.8 (κριτήριο Π-Π-Π) και την πρόταση I.23, κάτι που έχει οδηγήσει τους μελετητές να πιστεύουν ότι ο μεγάλος Έλληνας γεωμέτρης δεν ήταν περήφανος για αυτή τη μέθοδο (Rasmusen, 2012). Συγκεκριμένα αναφέρεται στα στοιχεία ότι: «*Εφαρμόζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ με το τρίγωνο ΔΕΖ, ώστε η κορυφή Α να τοποθετηθεί στην κορυφή Δ και η πλευρά ΑΒ στη ΔΕ. Επίσης, η ΑΓ θα ταυτιστεί με τη ΔΖ, αφού γωνία Α=γωνία Δ. Ώστε το σημείο Γ θα συμπέσει με το Ζ, αφού ΑΓ=ΔΖ. Άρα ΒΓ=ΕΖ και αφού τα τρίγωνα θα εφαρμόσουν είναι ίσα και έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα*».

Αν και για την απόδειξη των προτάσεων I.1, I.2 και I.3 χρησιμοποιεί κανόνα και διαβήτη, δεν κάνει το ίδιο και για την πρόταση I.4, βασιζόμενος στη μέθοδο της υπέρθεσης, χωρίς ωστόσο να ορίζει ένα αξιωματικό πλαίσιο οριοθέτησής της (Rasmusen, 2012). Ο Ευκλείδης υποθέτει ότι κατά τη μετακίνησή τους τα γεωμετρικά αντικείμενα παραμένουν αμετάβλητα, κάτι όμως το οποίο δεν αναφέρει προηγουμένως. Μάλιστα, σύμφωνα με νεότερες απόψεις της Φυσικής, η καμπυλότητα του χώρου εξαρτάται από την παρουσία βαρυτικών μαζών, άρα δεν είναι προφανής η αρχή του αναλλοίωτου των σωμάτων κατά την μετακίνησή τους (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., 2001).

Ο σκοπός της διδακτικής παρέμβασης είναι η κατανόηση της έννοιας της ισότητας τριγώνων από τους μαθητές. Ειδικότερα, επιδιώκεται οι μαθητές:

- να κατανοήσουν ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν συμπέσουν με κατάλληλη μετατόπιση του ενός
- να συνειδητοποιήσουν ότι τα ίσα τρίγωνα διατηρούν τις ιδιότητές τους ανεξάρτητα από την τοποθέτησή τους στο επίπεδο
- να αναφέρουν ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες τους ίσες μια προς μια
- να αντιληφθούν τη σημασία της ισότητας των πλευρών και γωνιών στην ισότητα τριγώνων
- να πειραματιστούν και διερευνήσουν εάν δύο ισογώνια τρίγωνα (π.χ. δύο ισόπλευρα τρίγωνα) είναι πάντοτε ίσα μεταξύ τους
- να διαπιστώσουν ότι τρίγωνα με τρία κύρια στοιχεία τους ίσα, δεν είναι πάντοτε ίσα
- να διατυπώσουν γεωμετρικούς συλλογισμούς, να πειραματιστούν και, αν είναι δυνατόν, να καταλήξουν στα κριτήρια ισότητας τριγώνων

- να συνεργαστούν με τους συμμαθητές τους, οργανώνοντας και αξιοποιώντας τα δεδομένα τους, να συζητήσουν τις παρατηρήσεις τους και να καταλήξουν σε συμπεράσματα
- να χρησιμοποιήσουν τα κριτήρια ισότητας για σύγκριση κατάλληλα επιλεγμένων τριγώνων
- να βελτιώσουν τη στάση τους απέναντι στην καθημερινή σχολική διαδικασία και στη μάθηση, ενεργώντας σε ένα εκπαιδευτικό περιβάλλον διαρκούς αλληλεπίδρασης.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Αποτελείται από ένα φύλλο εργασίας και αποσκοπεί στην ανίχνευση των αναπαραστάσεων και πρότερων γνώσεων των μαθητών, καθώς επίσης και στη διάγνωση γνωστικών δυσκολιών και παρερμηνειών τους, προκειμένου να προσαρμοστεί κατάλληλα η διδακτική παρέμβαση.

Αρχικά οι μαθητές θα ενημερωθούν για το θέμα και τους διδακτικούς στόχους. Η διαμόρφωση κατάλληλου κλίματος για το μαθητή μέσα στη σχολική τάξη, αποτελεί σημαντικό παράγοντα για την επιτυχή εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης. Οι μαθητές θα συμπληρώσουν το 1ο φύλλο εργασίας, το οποίο περιέχει ερωτήσεις και απλές γεωμετρικές κατασκευές, ώστε να ενεργοποιήσουν τις γνώσεις που έχουν και να τις συνδέσουν μετέπειτα με τις γεωμετρικές έννοιες και τους όρους που πρόκειται να διδαχθούν. Συγκεκριμένα, στο 1ο φύλλο εργασίας τίθενται τα παρακάτω ερωτήματα:

- Τι ονομάζεται τρίγωνο; Σχεδιάστε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ, μετρήστε και σημειώστε τα μήκη των πλευρών και τα μέτρα των γωνιών του.
- Ποια είναι τα είδη των τριγώνων με βάση τις πλευρές και ποια με βάση τις γωνίες τους; Σχεδιάστε διάφορα από τα είδη τριγώνων που γνωρίζετε και σημειώστε τα στοιχεία που καθορίζουν το είδος τους.
- Σχεδιάστε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 4cm και μετρήστε τις γωνίες του. Δικαιολογήστε.
- Σχεδιάστε ισοσκελές τρίγωνο με βάση 3cm και ίσες πλευρές 4cm. Μετρήστε τις γωνίες του.
- Τι σχέση έχουν οι γωνίες που είναι προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου;
- Πόσο είναι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου;
- Σχεδιάστε ορθογώνιο τρίγωνο με μια οξεία γωνία 30^{o}.
- Σχεδιάστε τρίγωνο με μήκη πλευρών 4cm, 5cm, 6cm.
- Ποιες γωνίες λέγονται κατακορυφήν; Τι σχέση έχουν δύο κατακορυφήν γωνίες;
- Σχεδιάστε μια γωνία 60^{o} και στη συνέχεια κατασκευάστε τη διχοτόμο της.

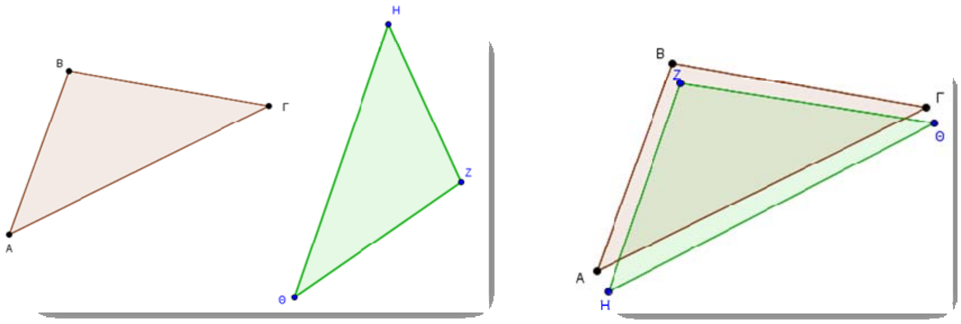
Με τον τρόπο αυτό μπορεί να ενεργοποιηθεί το ενδιαφέρον των μαθητών, ενώ συγχρόνως είναι δυνατόν να αξιοποιήσουν τις πρότερες γνώσεις και αναπαραστάσεις τους και ακολούθως, ίσως, τις μετατρέψουν σε επιστημονικά συμπεράσματα και κανόνες.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Αποτελείται από ένα φύλλο εργασίας. Σκοπός της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να κατανοήσουν ότι ισότητα τριγώνων σημαίνει:

- ταύτιση των δύο τριγώνων με κατάλληλη μετατόπιση αυτών

- ισότητα των αντίστοιχων πλευρών και γωνιών

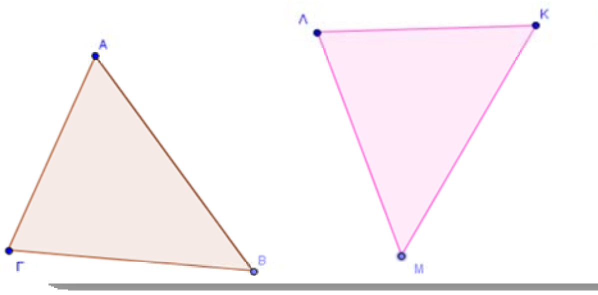


Σχήμα 1: Μετατόπιση και σύμπτωση τριγώνων

Οι μαθητές θα ανοίξουν αρχικά αρχείο (σχήμα 1), στο οποίο είναι σχεδιασμένα δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και ΗΖΘ (οι μαθητές δεν γνωρίζουν ότι τα τρίγωνα είναι ίσα). Σύμφωνα με το φύλλο εργασίας, οι μαθητές θα μετακινήσουν μια κορυφή του τριγώνου ΗΖΘ ώστε να συμπέσει με μια κορυφή του τριγώνου ΑΒΓ, και στη συνέχεια με περιστροφή του ενός τριγώνου θα εξετάσουν εάν είναι δυνατόν τα δύο τρίγωνα να ταυτιστούν. Ο πειραματισμός, για όλες τις κορυφές του τριγώνου ΗΖΘ, και η διερεύνηση της ενδεχόμενης ταύτισης των δύο τριγώνων, είναι πιθανόν να οδηγήσει τους μαθητές να διαπιστώσουν ότι τα δύο τρίγωνα μπορούν τελικά να ταυτιστούν.

Στη συνέχεια, ζητάμε από τους μαθητές να συμπληρώσουν δύο πίνακες, καταγράφοντας τα μήκη των πλευρών και τα μέτρα των γωνιών των δύο τριγώνων. Καταλήγοντας πιθανόν στο συμπέρασμα ότι, «*δύο τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες τους ίσες μια προς μια*», ζητάμε να σημειώσουν σε ένα τρίτο πίνακα τις ισότητες των αντίστοιχων πλευρών και γωνιών τους.

Τελικά, ζητάμε να ανοίξουν ένα δεύτερο αρχείο στο οποίο εμφανίζονται δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ (σχήμα 2). Με τη βοήθεια του λογισμικού, οι μαθητές πρέπει να μετρήσουν μόνο τα μήκη των πλευρών των δύο τριγώνων, και στη συνέχεια καλούνται να συμπληρώσουν πίνακα για την ισότητα των αντίστοιχων πλευρών και γωνιών τους, κατανοώντας πιθανόν ότι απέναντι από τις ίσες πλευρές ίσων τριγώνων βρίσκονται και ίσες γωνίες.



τρίγωνο ΑΒΓ		τρίγωνο ΚΛΜ
ΑΒ	=	
ΑΓ	=	
ΒΓ	=	
Α	=	
Β	=	
Γ	=	

Σχήμα 2: Εύρεση των ίσων στοιχείων σε ίσα τρίγωνα

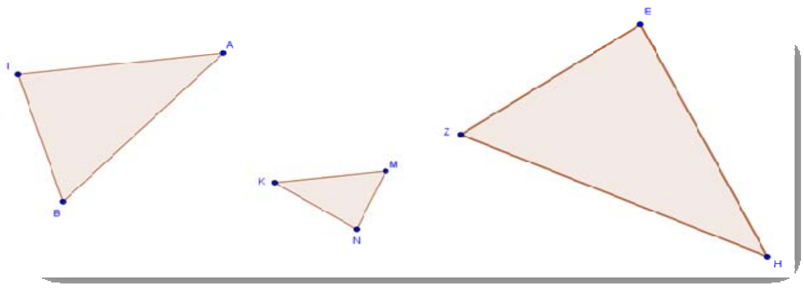
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Αποτελείται από ένα φύλλο εργασίας και έχει ως σκοπό να διερευνήσουν οι μαθητές, εάν είναι ίσα δύο τρίγωνα όταν έχουν:

- τις γωνίες τους ίσες μια προς μια
- τις πλευρές τους ίσες μια προς μια

Το πρώτο μέρος του 3ου φύλλου εργασίας βασίζεται στο ερώτημα: «*Είναι ίσα δύο τρίγωνα, τα οποία έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προς μια;*».

Σημειώνουμε τις απαντήσεις των μαθητών και δεχόμαστε ότι δύο ισογώνια τρίγωνα είναι ίσα. Ζητάμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν, με τη βοήθεια του λογισμικού, δύο ισόπλευρα τρίγωνα. Το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 3cm και το ισόπλευρο τρίγωνο ΔΕΖ με πλευρά 4cm.

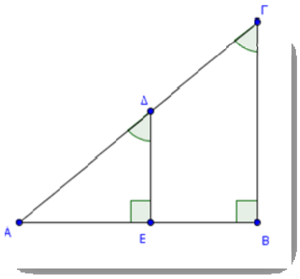


Σχήμα 3: Ισογώνια τρίγωνα

Το λογισμικό Geogebra, δίνει τη δυνατότητα κατασκευής κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές. Συμπληρώνοντας πίνακες με τα μέτρα των γωνιών τους, και με τη βοήθεια κατάλληλων ερωτημάτων, οι μαθητές είναι πιθανόν να παρατηρήσουν και να συμπεράνουν ότι τα δύο τρίγωνα δεν είναι ίσα.

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια του φύλλου εργασίας, οι μαθητές θα ανοίξουν αρχείο στο οποίο είναι σχεδιασμένα τρία τρίγωνα ΑΒΓ, ΕΖΗ και ΚΜΝ (σχήμα 3). Με τη βοήθεια του λογισμικού, οι μαθητές πρέπει να μετρήσουν τις γωνίες των τριγώνων, να σημειώσουν σε κατάλληλους πίνακες τα μέτρα των γωνιών, να παρατηρήσουν ότι είναι ισογώνια και να απαντήσουν εάν τα τρίγωνα είναι μεταξύ τους ίσα.

Τελικά, στο ίδιο φύλλο εργασίας (σχήμα 4), οι μαθητές θα προσπαθήσουν να αιτιολογήσουν ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προς μια και στη συνέχεια, να απαντήσουν στο ερώτημα αν τα δύο τρίγωνα είναι ίσα. Δεχόμενοι αρχικά τον ισχυρισμό ότι «*τρίγωνα με τις γωνίες τους ίσες μια προς μια είναι ίσα*», οι μαθητές είναι πιθανόν να διαπιστώσουν, διερευνώντας στις προαναφερθείσες εργασίες, ότι ο ισχυρισμός αυτός δεν ισχύει πάντοτε, δηλαδή ότι δεν είναι αληθής. Στο σημείο αυτό, θεωρείται χρήσιμο να αναφέρουμε στους μαθητές ότι για να δείξουμε στα μαθηματικά ότι ένας ισχυρισμός δεν αληθεύει, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε κάποιο αντιπαράδειγμα, δηλαδή να δείξουμε ότι δεν αληθεύει σε κάποια ή κάποιες ειδικές περιπτώσεις.



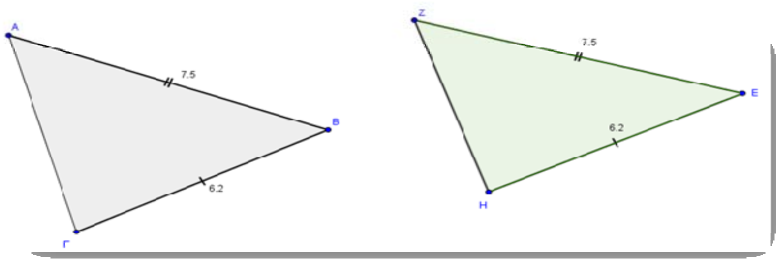
Σχήμα 4: Ισότητα γωνιών δύο τριγώνων

Το δεύτερο μέρος του 3ου φύλλου εργασίας, αφορά στο ερώτημα: «*Είναι ίσα δύο τρίγωνα, τα οποία έχουν τις πλευρές τους ίσες μια προς μια;*».

Ζητάμε από τους μαθητές να κατασκευάσουν γεωμετρικά τρίγωνα με μήκη πλευρών 4cm, 5cm, 6cm. Μετατοπίζοντας κατάλληλα τα τρίγωνα θα προσπαθήσουν να διαπιστώσουν εάν είναι δυνατόν να ταυτιστούν. Την ισότητα των τριγώνων, την οποία είναι πολύ πιθανόν να παρατηρήσουν, ζητάμε να την επαληθεύσουν κατασκευάζοντας τρίγωνα και με άλλα μήκη πλευρών, όπως επίσης συγκρίνοντας τα αποτελέσματά τους με αυτά των συμμαθητών τους. Έτσι, ίσως καταλήξουν στο συμπέρασμα, ότι: «*δύο τρίγωνα με τις πλευρές τους ίσες μια προς μια είναι ίσα*», (κριτήριο Π-Π-Π), ακολουθώντας ανάλογες ενέργειες και συλλογισμούς, όπως αυτές του Ευκλείδη στα στοιχεία.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4η

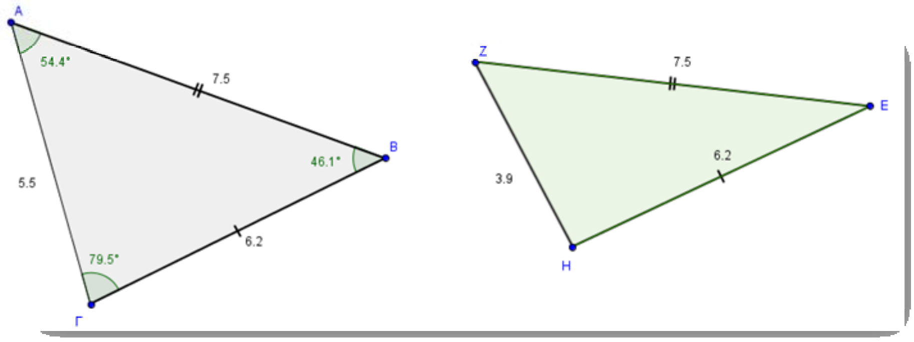
Αποτελείται από ένα φύλλο εργασίας. Σκοπός της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να διερευνήσουν υπό ποιες προϋποθέσεις, δύο τρίγωνα με δύο πλευρές τους ίσες, δύνανται να είναι ίσα.



Σχήμα 5: Τρίγωνα με δύο πλευρές τους ίσες μια προς μια

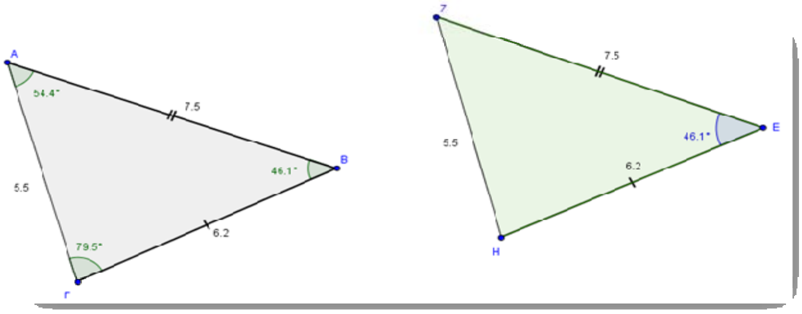
Στους μαθητές δίνεται αρχείο στο οποίο είναι σχεδιασμένο τρίγωνο ΑΒΓ, με σταθερά μήκη πλευρών, και τρίγωνο ΕΗΖ τέτοιο ώστε ΑΒ=ΖΕ και ΒΓ=ΕΗ (σχήμα 5).

Αρχικά, οι μαθητές ζητείται να συγκρίνουν ως προς την ισότητα τα δύο τρίγωνα, είτε με τη μέθοδο της υπέρθεσης, είτε μετρώντας τα μήκη των πλευρών των δύο τριγώνων και ελέγχοντας την ισότητα με το κριτήριο Π-Π-Π. Έτσι θα διαπιστώσουν ότι τα δύο τρίγωνα δεν είναι ίσα (σχήμα 6).



Σχήμα 6: Σύγκριση τριγώνων με δύο πλευρές τους ίσες μια προς μια

Ζητώντας να μετρήσουν τη γωνία Ε, την οποία σχηματίζουν οι πλευρές ΕΖ και ΕΗ, δίνουμε τη δυνατότητα στους μαθητές να πειραματιστούν και να διερευνήσουν πότε είναι δυνατόν τα δύο τρίγωνα να γίνουν ίσα. Έτσι, είναι πιθανόν να παρατηρήσουν ότι εάν οι γωνίες Β και Ε γίνουν ίσες, τότε αυτομάτως γίνονται ίσα και τα δύο τρίγωνα (σχήμα 7), καταλήγοντας έτσι στο κριτήριο Π-Γ-Π, δηλαδή: «*αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα*».



Σχήμα 7: Κριτήριο Π-Π-Π

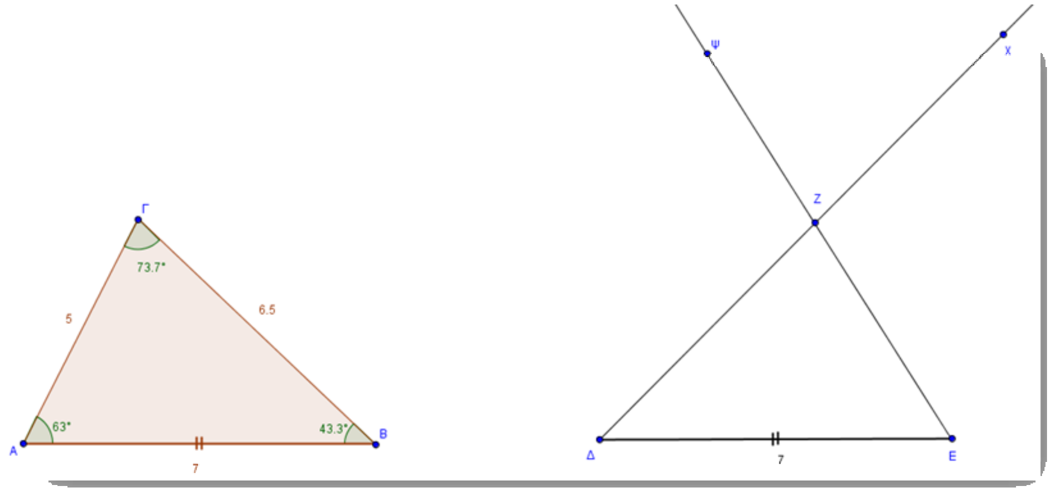
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5η

Αποτελείται από ένα φύλλο εργασίας. Σκοπός της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να διερευνήσουν υπό ποιες προϋποθέσεις, δύο τρίγωνα με μια πλευρά τους ιση, δύνανται να είναι ίσα.

Σχήμα 8: Τρίγωνο ΑΒΓ και τμήμα ΔΕ=ΑΒ

Στους μαθητές δίνεται αρχείο στο οποίο είναι σχεδιασμένο τρίγωνο ΑΒΓ, με σταθερά μήκη πλευρών, και τμήμα ΔΕ ίσου μήκους με το ΑΒ (σχήμα 8).

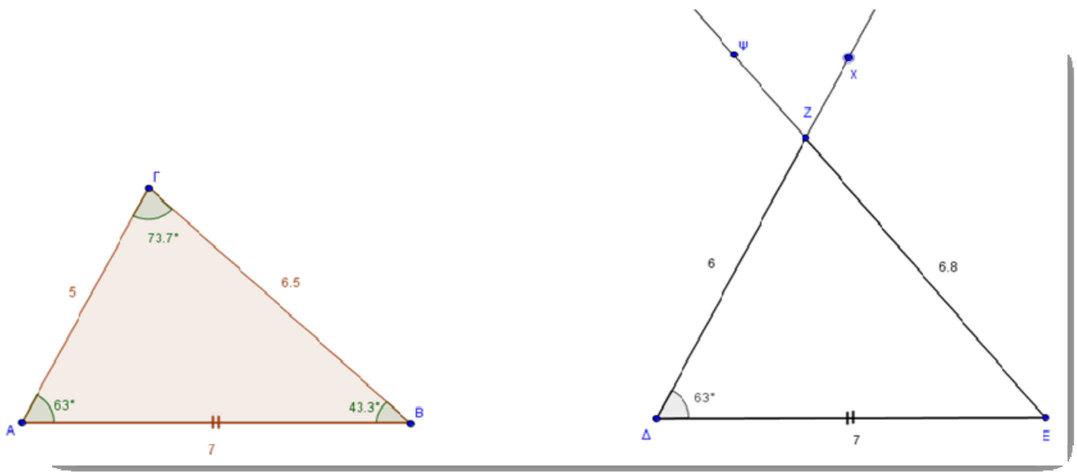
Αρχικά, οι μαθητές πρέπει να μετρήσουν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, τα μέτρα των γωνιών του, καθώς και το μήκος του τμήματος ΔΕ. Στη συνέχεια, ζητάμε να φέρουν ημιευθείες Δχ και Εψ, να σημειώσουν το σημείο τομής τους Ζ και να σχηματίσουν το τρίγωνο ΔΕΖ (σχήμα 9).



Σχήμα 9: Κατασκευή τριγώνου ΔΕΖ με ΔΕ=ΑΒ

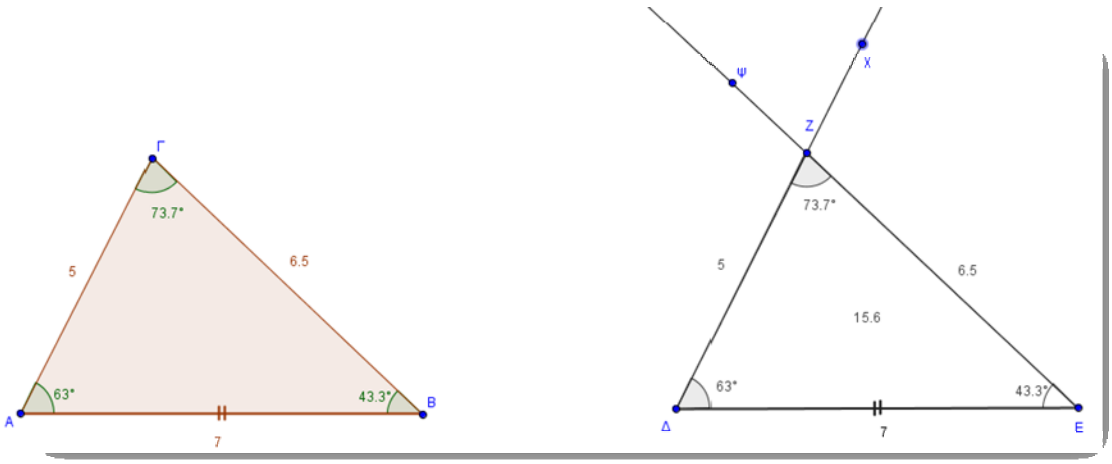
Γνωρίζοντας από τις προηγούμενες δραστηριότητες, ότι εάν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μια προς μια τότε είναι ίσα, ζητάμε να ελέγξουν την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ συγκρίνοντας τα μήκη των πλευρών τους. Προφανώς, θα διαπιστώσουν ότι τα δύο τρίγωνα δεν είναι ίσα. Στο σημείο αυτό, οι μαθητές θα διερευνήσουν, μετακινώντας τις ημιευθείες Δχ και Εψ, και μεταβάλλοντας αντίστοιχα τα μέτρα των γωνιών Δ και Ε, διαδοχικά στιγμιότυπα του τριγώνου ΔΕΖ, ώστε τελικά να γίνει ίσο με το τρίγωνο ΑΒΓ.

Σε πρώτη φάση, μετακινώντας μόνο την ημιευθεία Δχ με τέτοιο τρόπο ώστε οι γωνίες Α και Δ να γίνουν ίσες, θα διαπιστώσουν ότι η ισότητα μιας πλευράς (ΑΒ=ΔΕ) και μιας γωνίας (Α=Δ), δεν αποτελούν επαρκή στοιχεία για την ισότητα των δύο τριγώνων (σχήμα 10).



Σχήμα 10: Διερεύνηση της ισότητας ΑΒΓ=ΔΕΖ όταν ΑΒ=ΔΕ και Α=Δ

Σε δεύτερη φάση, μετακινώντας και την ημιευθεία Εψ (δεδομένου ότι ήδη είναι Α=Δ) σε θέση ώστε οι γωνίες Β και Ε να γίνουν ίσες, θα διαπιστώσουν ότι τελικά τα δύο τρίγωνα γίνονται ίσα (παρατηρώντας συγχρόνως ότι γίνονται ίσες και οι γωνίες Γ και Ζ), αφού τότε θα έχουν τις πλευρές τους ίσες μια προς μια (σχήμα 11). Βέβαια, το ίδιο θα προκύψει, εάν μετακινώντας την ημιευθεία Εψ, γίνουν ίσες οι γωνίες Γ και Ζ. Τελικά, οι μαθητές είναι πιθανόν να διαπιστώσουν και να αναφέρουν ότι: «*αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μια προς μια, τότε θα είναι ίσα*», (κριτήριο Γ-Π-Γ).



Σχήμα 11: Κριτήριο Γ-Π-Γ

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια πρόταση για τη διδασκαλία της έννοιας της ισότητας τριγώνων σε μαθητές Γυμνασίου με χρήση ΤΠΕ. Το εκπαιδευτικό λογισμικό Geogebra δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές για κατασκευή και διερεύνηση γεωμετρικών σχημάτων διαδραστικά, αποτελώντας ένα δυναμικό, μαθησιακό μέσο διερευνητικής και ανακαλυπτικής προσέγγισης της γνώσης κατά τη διδασκαλία και μάθηση της Γεωμετρίας.

Η χρήση λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας μπορεί να καταστήσει ικανούς τους μαθητές να διερευνούν και να πειραματίζονται με τις προτεινόμενες αλληλεπιδραστικές δραστηριότητες, καθώς και να παρατηρούν συγκεκριμένες ιδιότητες των γεωμετρικών τους κατασκευών, πριν προσπαθήσουν να τις αποδείξουν. Οι μαθητές παρατηρούν, καταγράφουν, υπολογίζουν, προβλέπουν, κατασκευάζουν, δοκιμάζουν και αναπτύσσουν θεωρίες για να εξηγήσουν φαινόμενα που τους απασχολούν (Man & Leung, 2005). Λειτουργώντας και αυτενεργώντας σε ένα συνεργατικό περιβάλλον διδασκαλίας και μάθησης με τη βοήθεια ενός λογισμικού Δυναμικών Μαθηματικών, όπως είναι το Geogebra, αναμφίβολα μόνο θετικά αποτελέσματα είναι δυνατόν να προκύψουν όσον αφορά στην κατανόηση του θέματος από τους μαθητές.

Η χρήση λογισμικών Δυναμικών Μαθηματικών, όπως το Geogebra, στη διδασκαλία των μαθηματικών, είναι δυνατόν να αποτελέσει σημαντικό παράγοντα για την αποτελεσματική και εις βάθος μάθηση των μαθηματικών. Τελικά, «η Δυναμική Γεωμετρία μπορεί να μετατρέψει τα μαθηματικά σε ένα επιστημονικό εργαστήριο» (Olive, 2000).

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ) (2001). Ευκλείδη "Στοιχεία". Η Γεωμετρία του επιπέδου. Τόμος Ι.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (Π.Ι) (2011). Μαθηματικά στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (Γυμνάσιο), Οδηγός για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων». Αθήνα 2011, σσ. 82.

Ράπτης, Α. & Ράπτη, Α. (1998). *Πληροφορική και Εκπαίδευση*. Αθήνα: Εκδόσεις Τελέθριον.

CK-12 Foundation, (2009). Geometry Teacher's Edition-Common Errors. USA, California: Creative Commons, pp. 22-24.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan Publishing Company.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C.Mammana & V.Villani (eds.) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 38). Kluwer Academic Publishers.

Hansen, V. (1998). Everlasting Geometry. In C.Mammana & V.Villani (eds.) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 11). Kluwer Academic Publishers.

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of geogebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27 (3).

Man, Y., & Leung, H. (2005). Teaching transformational geometry via dynamic geometry software. Paper presented at Redesigning Pedagogy International Conference: Research, Policy, Practice, Singapore.

Mikre, F. (2011). The Roles of Information Communication Technologies in Education: Review Article with Emphasis to the Computer and Internet. *Ethiopian Journal of Education and Sciences*, 6 (2).

Olive, J. (2000). Implications of Using Dynamic Geometry Technology for Teaching and Learning. Presented at the Conference on Teaching and Learning Problems in Geometry 2000. Fundao, Portugal.

Polya, G. (1954). Induction and analogy in mathematics. Vol.I of *Mathematics and Plausible reasoning*, pp. 83-84. Princeton University Press, New Jersey.

Rasmusen, E. (2012). Something Hilbert got wrong and Euclid got right: The method of superposition and the side-angle-side axiom in propositions 1 to 4 ob book I of the elements. Ανακτήθηκε από: http://www.rasmusen.org/papers/euclid-rasmusen.pdf.