

Μικροπειράματα στα πλαίσια της εφαρμογής «Κυβόκοσμος»

Φακούδης Ευάγγελος¹, Λάτση Μαρία², Παπαδόπουλος Θωμάς³

¹Μαθηματικός, Γυμνάσιο Σουφλίου

fakoudis@sch.gr

²Δασκάλα, 4ο Δημοτικό Σχολείο Μεγάρων

mlatsi@ppp.uoa.gr

³Μαθηματικός – Προγραμματιστής

thomas.d.papadopoulos@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή παρουσιάζει την εφαρμογή «κυβόκοσμος» που αναπτύχθηκε στα πλαίσια του εμπλουτισμού των σχολικών βιβλίων από το ΙΤΥΕ-Διόφαντος για την κατανόηση βασικών εννοιών της γεωμετρίας του χώρου. Αρχικά περιγράφεται το σκεπτικό ανάπτυξης της εφαρμογής, ενώ η προστιθέμενη αξία της αναδεικνύεται μέσα από την παρουσίαση ενός μικροπειράματος που έχει ενσωματωθεί στα ψηφιακά βιβλία των μαθηματικών του Δημοτικού. Στη συνέχεια περιγράφονται οι βασικές εκδοχές/πρότυπα αυτής της εφαρμογής και εξηγείται αναλυτικά ο τρόπος που μπορεί να κατασκευάσει ο εκπαιδευτικός τις δικές του δραστηριότητες παραμετροποιώντας κατάλληλα την εφαρμογή.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Κυβόκοσμος, μικροπειράματα, κυβάκια, γεωμετρία του χώρου

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με την ανάπτυξη της τεχνολογίας τα τελευταία χρόνια, ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να αντλήσει ένα μεγάλο αριθμό ψηφιακών δραστηριοτήτων ή ασκήσεων που μπορεί δυνητικά να χρησιμοποιήσει στα πλαίσια της διδασκαλίας. Το πρόβλημα όμως, τις περισσότερες φορές είναι η ποιότητα αυτού του υλικού, αφού πολλά από αυτά υποστηρίζουν την κλασική παραδοσιακή-μετωπική-παθητική διδασκαλία και όχι τις σύγχρονες απόψεις για το πώς μαθαίνει ο μαθητής και το πλαίσιο μέσα στο οποίο θα πρέπει να συμβαίνει αυτό. Ακόμα και όταν κάποιο υλικό είναι συμβατό με αυτές τις απόψεις, η επόμενη δυσκολία που αντιμετωπίζει ο εκπαιδευτικός είναι ότι αδυνατεί, κυρίως για τεχνικούς λόγους, να το προσαρμόσει στις δικές του απόψεις για τη φύση των μαθηματικών, το είδος και την ποιότητα των ερωτήσεων αλλά και στις ανάγκες των μαθητών του και της διδασκαλίας του. Τα τελευταία χρόνια όμως, όλο και περισσότερο αναπτύσσονται ψηφιακά δομήματα (συνήθως σε ανοιχτό-ελεύθερο λογισμικό) που δίνουν την δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να τα τροποποιήσει και να τα μετασχηματίσει όπως αυτός πιστεύει καλύτερα.

Αυτή η εργασία έχει στόχο να δώσει στον εκπαιδευτικό τις απαραίτητες πληροφορίες ώστε να έχει τη δυνατότητα να δημιουργήσει τις δικές του ψηφιακές

δραστηριότητες για τη γεωμετρία στο χώρο, χρησιμοποιώντας το υλικό του κυβόκοσμου που είναι αναρτημένο στα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία του Ψηφιακού Σχολείου και στο Φωτόδεντρο–Αποθετήριο Μαθησιακών Αντικειμένων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η γεωμετρία συνδέεται στην πρωταρχική της μορφή με την αντίληψη του χώρου, κάτι που μαρτυρά τόσο η ετυμολογία της λέξης όσο και η ιστορική πορεία των διαφόρων γεωμετρικών εννοιών. Εκκινώντας από πρακτικές δραστηριότητες και την ανάγκη του ανθρώπου να περιγράψει τον περιβάλλοντα χώρο, οι γεωμετρικές φόρμες έγιναν σταδιακά αντιληπτές αφαιρετικά και περιγράφηκαν θεωρητικά με αξιωματικό τρόπο. Όταν όμως αναφερόμαστε στην εκπαίδευση των παιδιών, η γεωμετρία εξακολουθεί να αφορά πρωτίστως «την αντίληψη του χώρου στον οποίο τα παιδιά ζουν, αναπνέουν και κινούνται» (Freudenthal, 1983, p. 403). Σήμερα, παρατηρείται ένα συνεχώς αυξανόμενο ενδιαφέρον αναφορικά με τον τρόπο που οι ψηφιακές τεχνολογίες μπορούν να προάγουν τη διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας, η συμβολή των οποίων θεωρείται ότι συνδέεται στενά με τη διαδραστικότητα, τις πολλαπλές αλληλοσυνδεόμενες αναπαραστάσεις, το δυναμικό χειρισμό και τη δυναμική εξεικόνιση (Laborde et al., 2006). Αν θεωρήσουμε την ανθρώπινη δραστηριότητα και τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται στα πλαίσια γεωμετρικών δραστηριοτήτων ως τμήμα της γεωμετρίας, πρέπει να παραδεχτούμε ότι η ίδια η γεωμετρία αλλάζει με τη χρήση των εν λόγω τεχνολογιών (Hölzl, 1996; Strasser, 2001).

Αλλάζοντας τις δομές και τα μέσα που χρησιμοποιούνται για τη μαθηματική έκφραση προκαλούνται αλλαγές στις πιθανές μαθηματικές πρακτικές (Healy, 2008), αλλαγές που δεν έχουν μόνο μια πραγματιστική διάσταση αλλά και μια επιστημολογική. Παράλληλα, αυτές ακριβώς οι δυνατότητες που παρέχονται από τις ψηφιακές τεχνολογίες μπορούν πιθανόν να αλλάξουν τις αντιλήψεις μας για το τι είναι διδάξιμο, με ποιο τρόπο και σε ποιες ηλικίες. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της τρισδιάστατης γεωμετρίας, η οποία θεωρείται ένα δύσκολο γνωστικό αντικείμενο που απαιτεί αφαιρετική σκέψη. Μολαταύτα οι δυνατότητες που μας παρέχουν τα ψηφιακά εργαλεία για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων μέσω διαδικασιών πειραματισμού, μοντελοποίησης, ελέγχου εικασιών και διαισθήσεων, ερμηνείας και γενίκευσης (Artigue, 2002) φαίνεται να έχουν αναζωπυρώσει το ενδιαφέρον για τη μάθηση και διδασκαλία της από την προσχολική και πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Ταυτόχρονα πολλοί ερευνητές και επιτροπές σύνταξης αναλυτικών προγραμμάτων (Berthelot & Salin 1998; Jones, 2000; NCTM, 2000) συγκλίνουν στο συμπέρασμα ότι το πρόγραμμα των μαθηματικών του Δημοτικού πρέπει να περιλαμβάνει τη μελέτη τρισδιάστατων αντικειμένων και να στοχεύει στην ανάπτυξη της ικανότητας οπτικοποίησης και αντίληψης των εννοιών του χώρου. Η ελλιπής ανάπτυξη χωρικών ικανοτήτων έχει συνδεθεί με πολλά από τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όχι μόνο σε ανώτερες βαθμίδες εκπαίδευσης, αλλά και σε χωρικές αναπαραστάσεις που αφορούν καθημερινές δραστηριότητες.

Εκκινώντας από την άτυπη γνώση των παιδιών και αναζητώντας τα φαινόμενα και μέσα που θα συμβάλουν στη μαθηματοποίηση του περιβάλλοντος χώρου αναπτύχθηκε ο ‘κυβόκοσμος’. Ο κυβόκοσμος αποτελεί ένα *applet* (εφαρμογή) που διευκολύνει τη διερεύνηση και τον πειραματισμό με τρισδιάστατα διαδραστικά εικονικά μοντέλα με στόχο την καλλιέργεια και ανάπτυξη εννοιών του χώρου, την αναπαράσταση χωρικών σχέσεων, αλλά και τη διασύνδεση μεταξύ αναπαραστάσεων

στα πλαίσια μικροπειραμάτων. Σε τέτοιου είδους περιβάλλοντα η πρόκληση έγκειται από τη μία στο να δοθεί στο χρήστη αρκετή ελευθερία δράσης και διερεύνησης και από την άλλη να τεθούν αυτοί οι περιορισμοί που θα 'οδηγούν' το χρήστη στην επιδιωκόμενη μαθηματική εμπειρία. Ο κυβόκοσμος 'επιβάλλει' μια κυβική δομή στις κατασκευές του, κάτι που έχει επιλεγεί σχεδιαστικά ώστε να συμβάλει στην ανάπτυξη συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών. Οι εικονικοί κύβοι – δομικοί λίθοι των κατασκευών και ο τρισδιάστατος προσομοιούμενος χώρος λειτουργούν ως 'υπολογιστικά χειραπτικά αντικείμενα' (cybernetic manipulatives (Karut, 1995)). Οι μαθητές κατασκευάζουν-δημιουργούν τα δικά τους μοντέλα, τα οποία χειρίζονται δυναμικά. Η εξεικόνιση που επιτυγχάνεται στην οθόνη του υπολογιστή, αν και πιο απομακρυσμένη από τα πραγματικά αντικείμενα, βρίσκεται εγγύτερα σημασιολογικά και διαδικαστικά στις μαθηματικές έννοιες που προσεγγίζονται κάθε φορά. Οι γεωμετρικές σχέσεις μπορούν να γίνουν αντιληπτές ως σταθερές και αμετάβλητες μέσα από τη διαρκή εναλλαγή της γωνίας θέασης του μοντέλου και την εναλλαγή δισδιάστατων και τρισδιάστατων αναπαραστάσεων του ίδιου αντικειμένου.

Ειδικότερα, με τον κυβόκοσμο μπορούν να προσεγγιστούν οι παρακάτω χωρικές έννοιες:

- Διευθύνσεις και θέσεις στο χώρο
- Δόμηση χώρου και συντεταγμένες
- Ανάλυση και σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων
- Σύνδεση μεταξύ γεωμετρικών σχημάτων και γεωμετρικών στερεών
- Αναγνώριση και αναπαράσταση σχημάτων από διαφορετικές οπτικές γωνίες
- Χωρικές σχέσεις μεταξύ διαφορετικών γεωμετρικών σχημάτων
- Μέτρηση όγκου

Τα μοντέλα που κατασκευάζονται στο κυβόκοσμο δεν αποτελούν απλή οπτική αναπαράσταση μιας αφηρημένης μαθηματικής έννοιας, αλλά μπορούν να λειτουργήσουν ως διαμεσολαβητικά εργαλεία γεφυρώνοντας το κενό μεταξύ άτυπων/εναλλακτικών στρατηγικών επίλυσης προβλήματος και των τυπικών μαθηματικών, καθώς με τον κατάλληλο διδακτικό σχεδιασμό μπορούν να μετατραπούν σε μαθηματικά αντικείμενα. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι ο κυβόκοσμος επιτρέπει διάφορες μορφές 'πρόσβασης' στις λειτουργίες του. Πέρα από ένα εικονικό τρισδιάστατο περιβάλλον για κατασκευές και πειραματισμό με κύβους, ο κυβόκοσμος επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να έχει πρόσβαση στη 'βαθιά δομή', για να αναπτύξει ο ίδιος συγκεκριμένες κατασκευές, οι οποίες θα λειτουργήσουν στη συνέχεια ως σημείο αφόρμησης ή σημείο αναφοράς των διερευνήσεων των μαθητών.

Η προστιθέμενη παιδαγωγική αξία του μικρόκοσμου αναδεικνύεται σε επόμενη ενότητα μέσα από την περιγραφή ενός 'μικροπειράματος' που αναπτύχθηκε για τον εμπλουτισμό των ψηφιακών βιβλίων των μαθηματικών, ενώ στη συνέχεια δίνεται έμφαση στον τρόπο με τον οποίο ο εκπαιδευτικός μπορεί είτε να τροποποιήσει έτοιμο υλικό είτε να αναπτύξει από την αρχή ο ίδιος δραστηριότητες στον κυβόκοσμο.

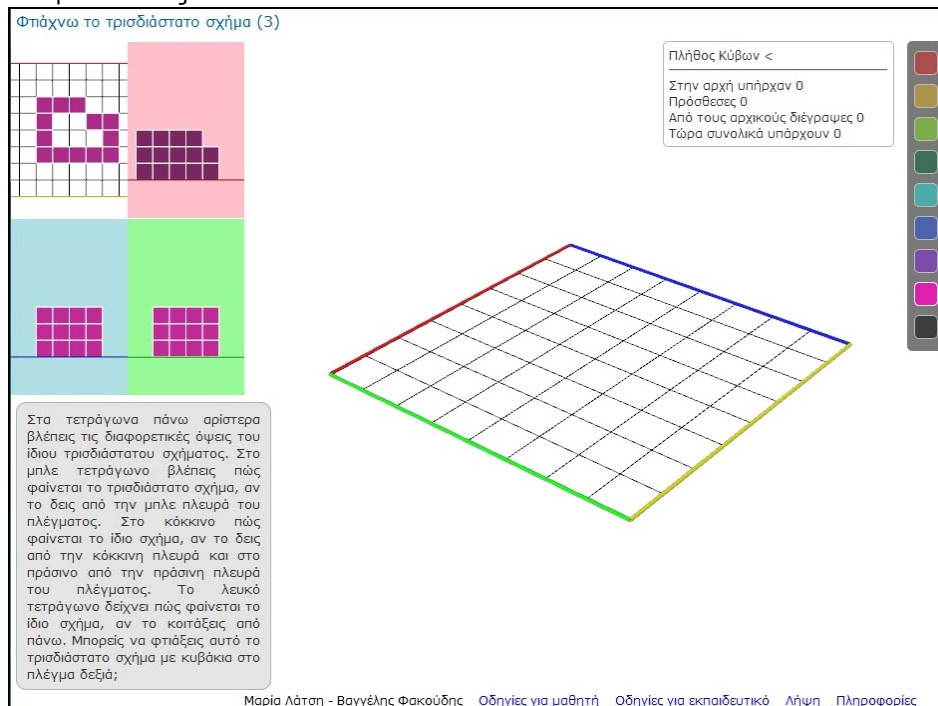
ΜΙΚΡΟΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΜΕ ΤΟΝ ΚΥΒΟΚΟΣΜΟ

Ο όρος «μικροπειράματα» χρησιμοποιείται στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών για να περιγράψει ψηφιακά δομήματα «...στο πλαίσιο κατανόησης εννοιών, αναπαραστάσεων, και των συνδέσεων μεταξύ αναπαραστάσεων (π.χ. πώς

μετεξελισσεται η γραφική παράσταση της δευτεροβάθμιας συνάρτησης καθώς αλλάζει ο συντελεστής του x^2)» (νέο Πρόγραμμα Σπουδών, 2011).

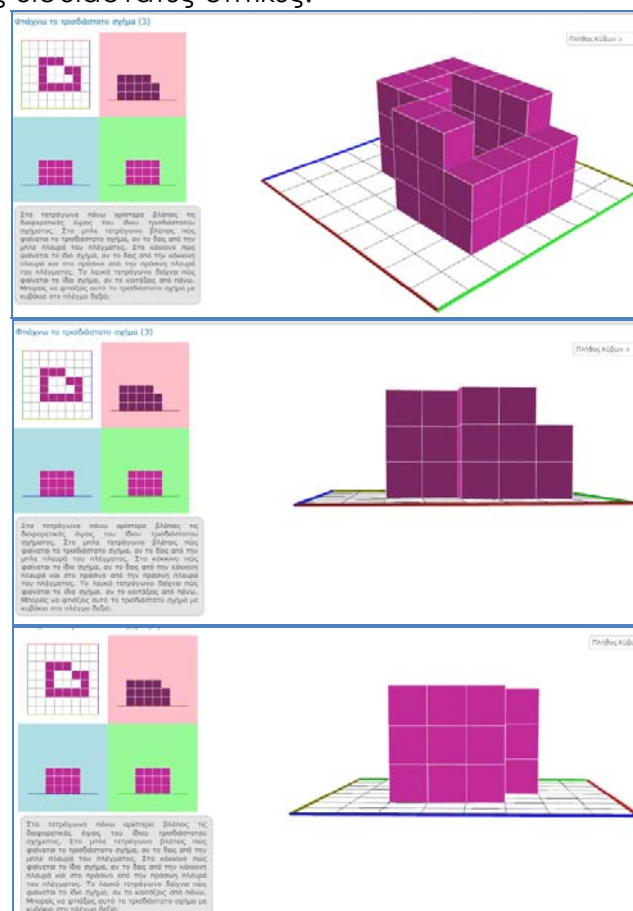
Τα βασικά χαρακτηριστικά ενός μικροπειράματος είναι: i) προορίζεται για το μαθητή σε ατομικό ή ομαδικό επίπεδο, με υποστήριξη από τον εκπαιδευτικό ή τον γονέα, ii) εμπεριέχει διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις, iii) δημιουργείται όπου είναι εφικτό με εργαλείο ανάπτυξης ένα από τα θεσμοθετημένα εργαλεία μαθηματικής έκφρασης για τους μαθητές, iv) η βασική χρήση από τους μαθητές προβλέπει δυναμικό χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων ώστε συμπεριφορές – σχέσεις και ιδιότητες να γίνονται αντικείμενο προβληματισμού, διερεύνησης και διαπραγμάτευσης, v) το κάθε μικροπείραμα μπορεί να καλύπτει μια έννοια με στενό τρόπο ή ένα ευρύτερο πεδίο που εμπλέκονται συνδεδεμένες έννοιες, vi) έχει κειμενικά ερωτήματα και προτροπές προς διερεύνηση. Δεν παρέχει τη λύση, αφήνει την ευθύνη στον εκπαιδευτικό.

Με τον κυβόκοσμο έχουν αναπτυχθεί μικροπειράματα με τα οποία έχουν εμπλουτιστεί τα ψηφιακά βιβλία των Μαθηματικών από την Γ' έως την ΣΤ' Δημοτικού. Ένα χαρακτηριστικό μικροπείραμα του κυβόκοσμου, που αναπτύχθηκε με το πρότυπο orthographic είναι αυτό του Σχήματος 1. Το μικροπείραμα αυτό έχει ενταχθεί στο κεφάλαιο 54 της Ε' Δημοτικού (<http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSDIM-E102/705/4663,21167/>) - Επέκταση 6 ή στο Φωτόδεντρο στη διεύθυνση <http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/10885>) και έχει τίτλο 'Φτιάχνω το τρισδιάστατο σχήμα (3)'. Εμπλέκοντας τους μαθητές σε μια διαδικασία διερεύνησης των σχέσεων μεταξύ ενός τρισδιάστατου αντικειμένου και των δισδιάστατων οπτικών του από συγκεκριμένες οπτικές γωνίες, το συγκεκριμένο μικροπείραμα στοχεύει στην ανάπτυξη συνδέσεων μεταξύ δισδιάστατων και τρισδιάστατων αναπαραστάσεων και μέσω αυτής της διαδικασίας στην κατανόηση των τρισδιάστατων γεωμετρικών αντικειμένων και των ιδιοτήτων τους.



Σχήμα 12: Χαρακτηριστικό παράδειγμα μικροπειράματος του κυβόκοσμου

Αρχικά δίνονται στους μαθητές 4 δισδιάστατες όψεις μια τρισδιάστατης κατασκευής, η κάτοψη (θέαση από πάνω) και τρεις δισδιάστατες όψεις που αντιστοιχούν στις όψεις που θα δει ένας παρατηρητής, αν βλέπει την τρισδιάστατη κατασκευή στον κεντρικό καμβά από την κόκκινη, την μπλε και την πράσινη πλευρά αντίστοιχα. Οι μαθητές πρέπει να ανασυνθέσουν το τρισδιάστατο σχήμα βασιζόμενοι σε αυτές τις 4 όψεις, κάτι που απαιτεί έναν ιδιαίτερα υψηλό βαθμό οπτικοποίησης, απαιτεί δηλαδή την ανάπτυξη, το χειρισμό και την επεξεργασία πολύπλοκων νοερών αναπαραστάσεων. Το περιβάλλον όμως παρέχει στους μαθητές αυξημένες δυνατότητες πειραματισμού καθώς μπορούν με ευκολία να χρησιμοποιήσουν κύβους και να ανασυνθέσουν το τρισδιάστατο μοντέλο μέσω δοκιμής και πλάνης (Σχήμα 2). Η συγκεκριμένη όμως δραστηριότητα, έχει αναπτυχθεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι πολύ εύκολο να γίνει λάθος αν δεν συνδυαστούν με προσοχή όλες οι οπτικές και αν δε γίνει κατανοητό από τους μαθητές ότι μια δισδιάστατη οπτική, καθώς στερείται της 3ης διάστασης, δε μας δίνει επαρκείς πληροφορίες. Κατά την προσπάθεια ανασύνθεσης του τρισδιάστατου σχήματος καθοριστικό ρόλο μπορεί να διαδραματίσει η λειτουργικότητα 'περιεπισκόπησης' του κυβόκοσμου. Το συγκεκριμένο περιβάλλον δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να περιστρέψει μέσω δυναμικού χειρισμού τον καμβά της κατασκευής και να 'περιηγηθεί' γύρω από την κατασκευή του. Αυτή η δυνατότητα περιεπισκόπησης επιτρέπει στο χρήστη να πειραματιστεί με διάφορες απεικονίσεις (δισδιάστατες και τρισδιάστατες) της κατασκευής του και να τις συγκρίνει ανά πάσα στιγμή με τις αρχικές δισδιάστατες οπτικές.



Σχήμα 2: Δισδιάστατες και τρισδιάστατες απεικονίσεις της ίδιας κατασκευής

Τα τρισδιάστατο αντικείμενα που οι μαθητές κατασκευάζουν στον κυβόκοσμο αποτελούν ένα είδος 'νοητικού καθρέφτη', αντικατοπτρίζουν δηλαδή τις εννοιολογικές τους δομές και τον τρόπο που αντιλαμβάνονται το αντικείμενο της ενασχόλησής τους. Αν και ο κυβόκοσμος δε διδάσκει ούτε αξιολογεί τις ενέργειες των μαθητών, παρέχει ένα ευρύ πεδίο φαινομενολογίας και μια εύκολα μεταφράσιμη ανατροφοδότηση που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να χτίσουν τις δικές τους 'νοητικές σκαλωσιές' και τους εκπαιδευτικούς να παρατηρήσουν τις εννοιολογικές δομές των μαθητών τους.

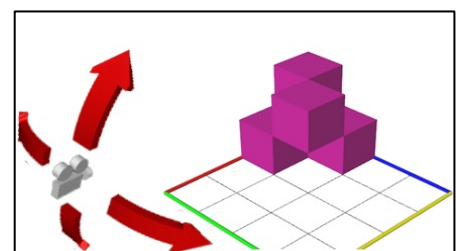
Τόσο ο κυβόκοσμος όσο και τα μικροπειράματα που αναπτύσσονται σε αυτόν δεν αποτελούν 'κλειστές' εφαρμογές. Τα μικροπειράματα που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια του εμπλουτισμού των ψηφιακών βιβλίων μπορούν, εκτός από το να χρησιμοποιηθούν ως έχουν στην εκπαιδευτική διαδικασία, να γίνουν αντικείμενα πειραματισμού για τον ίδιο τον εκπαιδευτικό, ο οποίος μπορεί εύκολα να τα τροποποιήσει και να τα προσαρμόσει στους δικούς του στόχους και στις ιδιαιτερότητες των μαθητών του. Ακόμα πάρα πέρα και στα πλαίσια πιο συνθετικών εργασιών τα μικροπειράματα θα μπορούσαν να γίνουν αντικείμενο διαπραγματεύσεως και εργαλείο έκφρασης στα χέρια των ίδιων των μαθητών, οι οποίοι θα μπορούσαν να τα τροποποιήσουν για να φτιάξουν κάτι δικό τους έχοντας πρόσβαση στη 'βαθιά' δομή και παραμετροποιώντας κατάλληλα την εφαρμογή.

ΟΙ ΕΚΔΟΧΕΣ/ΠΡΟΤΥΠΑ ΤΟΥ ΚΥΒΟΚΟΣΜΟΥ

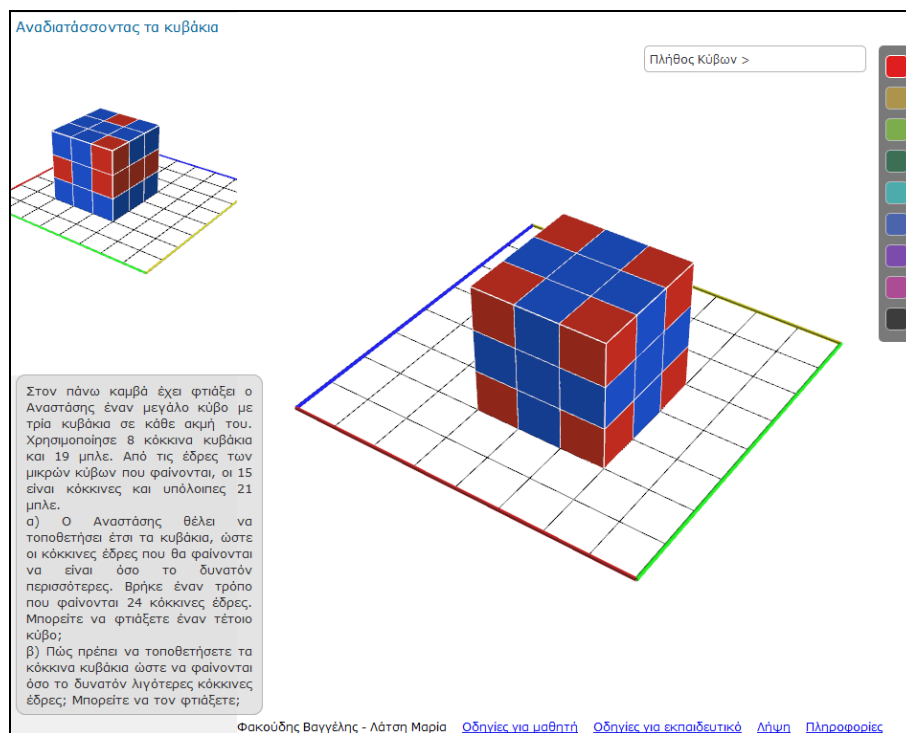
Ο κυβόκοσμος κατασκευάστηκε στα πλαίσια του έργου εμπλουτισμού των σχολικών βιβλίων από το ΙΤΥΕ – Διόφαντος ενώ η ιδέα προήλθε από το Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education (<http://www.fisme.science.uu.nl/toepassing/00724/>). Στηρίχθηκε σε αποτελέσματα έρευνας του Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας (Τομέας Παιδαγωγικής, Φ.Π.Ψ., Φιλοσοφική Σχολή, Ε.Κ.Π.Α.) και αναπτύχθηκε με την καθοδήγηση του καθηγητή Χρόνη Κυνηγού. Η εφαρμογή αναπτύχθηκε σε JavaScript / html5 και στηρίζεται στο WebGL (<http://www.khronos.org/>), το οποίο είναι ένα JavaScript API του OpenGL ES 2.0 για το web. Ειδικότερα, χρησιμοποιήθηκε το framework <http://threejs.org/> που πρόσφατα έγινε πολύ δημοφιλές.

Για την αναπαράσταση του τρισδιάστατου χώρου χρησιμοποιήθηκαν εικονικές κάμερες (Σχήμα 3) που κινούνται σε σφαιρική επιφάνεια, στο κέντρο της οποίας βρίσκεται ο καμβάς σχεδίασης ή κάποιο μοντέλο. Οι κάμερες κινούνται πατώντας και σύροντας το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού. Υπάρχουν δύο κινήσεις, μια οριζόντια γύρω από τον άξονα z και μια σε πολική τροχιά. Η οριζόντια κίνηση δεν έχει περιορισμούς, ενώ τα όρια της πολικής κίνησης καθορίζονται παραμετρικά.

Τα κύρια μέρη της οθόνης που βλέπει ο χρήστης του προτύπου copybuilding (Σχήμα 4), είναι:



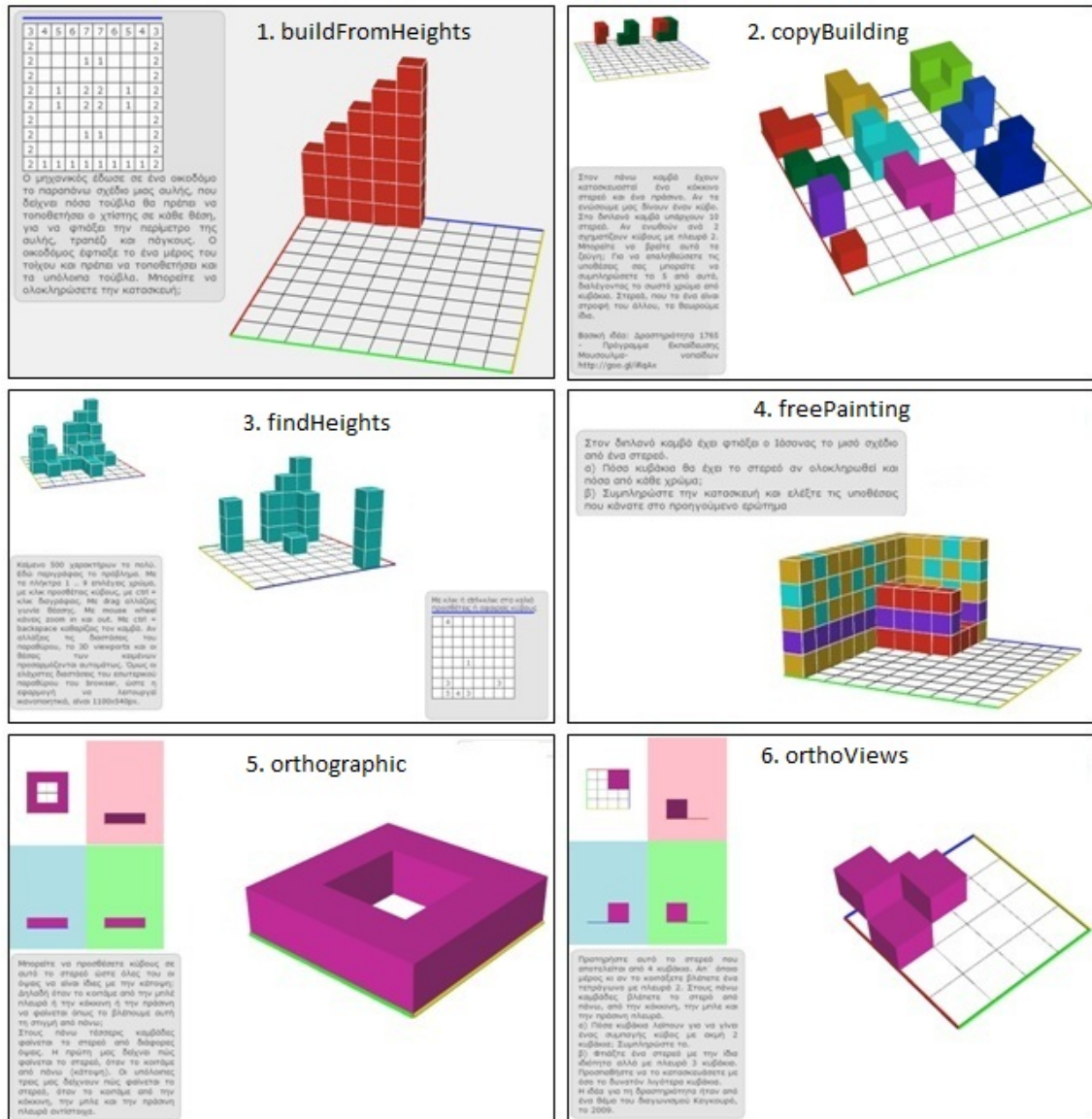
Σχήμα 3: Εικονική κάμερα



Σχήμα 4: Τα κύρια μέρη του κυβόκοσμου

- i) Πάνω αριστερά, υπάρχει ο τίτλος του μικροπειράματος.
 - ii) Από κάτω, υπάρχει ο καμβάς 'μοντέλο', όπου ο εκπαιδευτικός θα έχει κατασκευάσει στερεά που αναφέρεται σ' αυτά στην εκφώνηση του μικροπειράματος. Ο μαθητής δεν μπορεί να επεμβαίνει σ' αυτόν τον καμβά παρά μόνο να τον περιστρέφει.
 - iii) Κάτω αριστερά είναι η εκφώνηση της δραστηριότητας.
 - iv) Στο κέντρο, είναι ο κεντρικός καμβάς όπου ο μαθητής μπορεί να τον περιστρέφει, να προσθέτει ή να αφαιρεί κυβάκια (προσθέτει με κλικ του αριστερού πλήκτρου του ποντικιού και διαγράφει όπως πριν, αλλά έχοντας πατημένο το πλήκτρο «Ctrl»). Μπορεί να μεγεθύνει ή να σμικρύνει τον καμβά με τη ρόδα (wheel) του ποντικιού και μπορεί να αρχικοποιήσει τον καμβά πατώντας ταυτόχρονα Ctrl και Backspace.
 - v) Πάνω δεξιά, μπορεί να επιλέγει να εμφανίζεται το αρχικό πλήθος των κύβων, αυτούς που πρόσθεσε, αυτούς που διέγραψε από τους αρχικούς και το συνολικό αριθμό κύβων που υπάρχουν στον καμβά.
 - vi) Δεξιά και πάνω επίσης, υπάρχει η παλέτα χρωμάτων όπου ο χρήστης μπορεί να διαλέγει το χρώμα των επόμενων κύβων που θα τοποθετήσει.
 - vii) Τέλος, στο κάτω μέρος υπάρχουν τα ονόματα των δημιουργών, σύνδεσμοι για οδηγίες χρήσης προς μαθητές και καθηγητές, λήψη του φακέλου της εφαρμογής και πληροφορίες σχετικά με τους φορείς υλοποίησης του έργου που είναι ενταγμένο το συγκεκριμένο μικροπείραμα και των ανθρώπων που εργάστηκαν σ' αυτό.
- Η ομάδα ανάπτυξης κατασκεύασε έξι εκδοχές/πρότυπα του κυβόκοσμου οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν για να εμπλουτίσουν τα σχολικά βιβλία του δημοτικού. Μπορεί κάποιος να τα αναζητήσει εύκολα στο Φωτόδεντρο-Αποθετήριο Μαθησιακών Αντικειμένων (<http://photodentro.edu.gr/>) αρκεί να πληκτρολογήσει στην αναζήτηση τη λέξη «κυβόκοσμος».

Στην Σχήμα 5 φαίνονται οι έξι εκδοχές/πρότυπα του κυβόκοσμου. Τα βασικά χαρακτηριστικά του κάθε προτύπου είναι:



Σχήμα 5: Οι έξι εκδοχές/πρότυπα του κυβόκοσμου

1. buildFromHeights: Στα αριστερά υπάρχει ένας πίνακας όπου αποτυπώνεται ο αριθμός των κύβων που πρέπει να προστεθούν στις αντίστοιχες θέσεις του κεντρικού καμβά.

2. copyBuilding: Έχει δύο καμβάδες και δύο κινούμενες κάμερες. Στο μικρό καμβά (ή μοντέλο) πάνω αριστερά, συνήθως απεικονίζεται ένα σχήμα που πρέπει να κατασκευάσει ο μαθητής ή μια ημιτελής κατασκευή ή ένα παράδειγμα κ.ο.κ.

3. findHeights: Η διαφορά αυτού του προτύπου από το προηγούμενο είναι ότι για να τοποθετήσεις κύβους στον κεντρικό καμβά, πρέπει να κάνεις κλικ σε κελί του πίνακα που έχει κάτω δεξιά. Σε κάθε κλικ προστίθεται και ένας κύβος, ενώ ο αριθμός στο κελί του πίνακα δείχνει τον αριθμό των κύβων που βρίσκονται πάνω σ' αυτό το τετράγωνο.

4. freePainting: Αυτό το πρότυπο έχει μόνο έναν κεντρικό καμβά όπου αν θέλει ο δημιουργός, μπορεί να σχεδιάσει μια ημιτελή κατασκευή (κάτι που μπορεί να γίνει σε όλα τα πρότυπα).

5. orthografic: Σ' αυτό το πρότυπο υπάρχουν 5 κάμερες. Η μία βλέπει τον κύριο καμβά ενώ οι υπόλοιπες είναι σταθερές. Δεν αλλάζουν όψη καθώς προστίθενται ή αφαιρούνται κυβάρια στον κεντρικό καμβά, γιατί βλέπουν το μοντέλο. Πρόκειται για την κάτοψη (θέαση από πάνω) και τριών όψεων που αντιστοιχούν στην οριζόντια θέαση από την κόκκινη, μπλε και πράσινη πλευρά του καμβά του μοντέλου.

6. orthoViews: Κι αυτό το πρότυπο έχει 5 κάμερες, αλλά όλες βλέπουν τον καμβά σχεδίασης. Η κύρια έχει δυνατότητα κίνησης. Οι υπόλοιπες 4 είναι σταθερές και δείχνουν την κατασκευή από επάνω (κάτοψη) και από 3 όψεις, όπως προηγουμένως. Έτσι προσθέτοντας ή αφαιρώντας κυβάρια αλλάζουν οι προβολές και στα αριστερά.

Ο ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΕΙ ΤΙΣ ΔΙΚΕΣ ΤΟΥ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Το πρώτο που πρέπει να κάνει ένας εκπαιδευτικός για να φτιάξει τις δικές του δραστηριότητες στον κυβόκοσμο, είναι να επιλέξει το πρότυπο που θα χρησιμοποιήσει. Γι' αυτόν το λόγο μπορεί να επιλέξει ένα από τα μικροπειράματα του κυβόκοσμου που είναι αναρτημένα στο Φωτόδεντρο ή εναλλακτικά, να κατεβάσει τις βελτιωμένες εκδόσεις από τη διεύθυνση: <https://www.dropbox.com/sh/iu3n1u2cy3frfuj/5zi8zoDGjw?n=9138485> και να τις παραμετροποιήσει κατάλληλα (οι παρακάτω οδηγίες αναφέρονται κυρίως στις βελτιωμένες εκδόσεις).

Ο φάκελος κάθε προτύπου, περιέχει τους υποφακέλους *common* και *js* καθώς και το *index.html* που είναι το «εκτελέσιμο» αρχείο. Στο αρχείο *index* (τροποποιείται με οποιονδήποτε editor), στη γραμμή `<scriptsrc = "js/model_8.js"></script>` γίνεται αναφορά στο αρχείο παραμετροποίησης, που είναι της μορφής *model_x.js*. Αυτό το αρχείο βρίσκεται στο φάκελο *js* και ανοίγει με κάποιον editor. Είναι το αρχείο που έχει όλες τις πληροφορίες σχετικά με τη δραστηριότητα του συγκεκριμένου προτύπου που έχει επιλεγεί. Μέσα στο φάκελο *js* μπορεί να υπάρχουν και άλλα *model* με άλλο νούμερο ως κατάληξη. Αν στο *index* αλλάξει αυτό το νούμερο θα ανοίξει άλλη δραστηριότητα, του ίδιου όμως προτύπου.

Βήμα 1ο Στο «*titleText* =» ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει (μέσα στα εισαγωγικά) το δικό του τίτλο στη δραστηριότητα. Στο «*problemText* =» μπορεί να γράψει την εκφώνηση της δραστηριότητας, ενώ στο «*authorText* =» να γράψει το όνομά του.

Βήμα 2ο Το επόμενο που πρέπει να αναρωτηθεί ο εκπαιδευτικός, είναι αν ο καμβάς σχεδίασης θέλει να έχει άλλες διαστάσεις από αυτήν του προτύπου. Πριν μπει όμως σ' αυτή τη διαδικασία, καλό θα ήταν να ελέγξει αν τα υπόλοιπα *model* αρχεία που υπάρχουν μέσα στο φάκελο *js* έχουν διαστάσεις που τον βολεύουν. Για παράδειγμα στο πρότυπο *freePainting* το αρχείο *model* που καλεί το *index*, είναι το *model_5* με καμβά 10X10 (στην πραγματικότητα είναι 10X10X10). Αν το αλλάξει και επιλέξει το *model_10* τότε θα έχει έναν καμβά διαστάσεων 6X6, όμως θα έχουν αλλάξει και οι υπόλοιποι παράμετροι της δραστηριότητας. Είναι πιο εύκολο να τροποποιηθεί κάποιο αρχείο *model* παρά να δημιουργηθεί εξ αρχής.

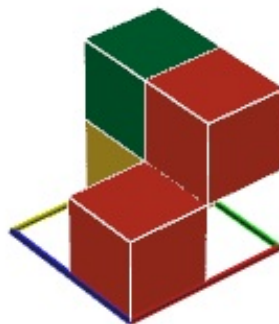
Στην περίπτωση που δεν υπάρχει καμβάς των διαστάσεων που θέλει, τότε ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να επέμβει στα εξής:

α) Να αλλάξει την τιμή της μεταβλητής *gridDimension* σε έναν αριθμό πολλαπλάσιο του 50. Το πηλίκο της τιμής αυτής με το 50, δίνει την διάσταση του καμβά. Για παράδειγμα, αν δώσουμε την τιμή 300 ο καμβάς θα έχει διάσταση 6X6, αν δώσουμε την τιμή 400 θα έχει διάσταση 8X8.

β) Το επόμενο βήμα, είναι να αλλάξει όλους τους πίνακες. Μετά το σχόλιο *CANVAS DATA* υπάρχει η μεταβλητή *canvasGeometry*. Είναι ένας πίνακας 3 διαστάσεων και τηρεί δεδομένα που αφορούν μια τυχόν κατασκευή στον αρχικό καμβά σχεδίασης. Η τιμή 0 αντιστοιχεί σε κενό χώρο και οι τιμές 1 έως 9 σε κύβο αντίστοιχου χρώματος με την παλέτα των χρωμάτων (1 στο κόκκινο, 2 στο καφέ, ..., 9 στο μαύρο). Η διάταξη του πίνακα είναι ορισμένη ως εξής: γραμμή, στήλη, πύργος. Δηλαδή, το πρώτο σέτ τιμών αντιστοιχεί στον πύργο της πρώτης γραμμής και πρώτης στήλης. Αυτός ο πύργος θα εμφανιστεί στην τομή της κόκκινης με την μπλε γραμμή. Θα πρέπει όλοι οι πίνακες γραμμές να έχουν διάσταση ίση με τη διάσταση που ρύθμισε πριν (λόγος *gridDimension/50*).

Για παράδειγμα, αν θέλει έναν καμβά 2 x 2 και θέλει να κατασκευάσει το στερεό όπως φαίνεται στο Σχήμα 6 θα γράψει (πρέπει φυσικά να αλλάξει και την τιμή της *gridDimension* σε 100):

```
canvasGeometry =
[
  [
    [1,0],
    [0,0]
  ],
  [
    [0,1],
    [2,4]
  ]
];
```



Σχήμα 6: Παράδειγμα κατασκευής στερεού

Δηλαδή, ως αρχή θεωρείται το σημείο τομής της μπλε και κόκκινης γραμμής. Το [1,0] δημιουργεί τον κόκκινο κύβο και το κενό που υπάρχει από πάνω του. Με το [0,0] αφήνει κενά στον πύργο που βρίσκεται στη διπλανή στήλη (κατά μήκος της μπλε γραμμής). Με τα επόμενα στοιχεία [0,1] και [2,4] δημιουργεί τους επόμενους δύο πύργους (στη δεύτερη σειρά από την μπλε γραμμή). Τη στήλη με το κενό και τον κόκκινο κύβο από πάνω και δίπλα, τον καφέ με τον πράσινο κύβο από πάνω.

Βήμα 3ο Η επόμενη παράμετρος που πιθανόν να θέλει να τροποποιήσει, είναι αν επιθυμεί ή όχι να εμφανίζονται οι αριθμοί των κύβων που υπήρχαν αρχικά κλπ. Κάτω από το σχόλιο *COUNTERS*, υπάρχουν 4 μεταβλητές που καθορίζουν την εμφάνιση ή μη των δεικτών πλήθους των κύβων.

```
init_show = true; // πλήθος κύβων που υπάρχουν αρχικά στον κεντρικό καμβά
usr_show  = true; // πλήθος κύβων που πρόσθεσε ο μαθητής
```

```

rare_show = true; // πλήθος κύβων που διέγραψε ο μαθητής από αυτούς που
                    υπήρχαν στον αρχικό καμβά,
tot_show = true; // τρέχον σύνολο κύβων
'Ο,τι δεν θέλει να εμφανίζεται, θα πρέπει να γίνει false.

```

Βήμα 4ο Ένα άλλο στοιχείο που πιθανόν να τον ενδιαφέρει είναι αν θα εμφανίζονται ή όχι οι ακμές των κύβων. Στο Σχήμα 4, στα παραδείγματα των προτύπων 1, 3 και 4 οι ακμές φαίνονται, ενώ στα υπόλοιπα όχι. Η μεταβλητή *wireFrame* (είναι στο πάνω μέρος του αρχείου, μετά τις εκφωνήσεις και το «Colors») καθορίζει την εμφάνιση ή μη των λευκών ακμών. Όταν έχει τιμή *true* εμφανίζονται, διαφορετικά πρέπει να έχει τιμή *false*.

Βήμα 5ο Μια άλλη παραμετροποίηση που επίσης πιθανόν να τον ενδιαφέρει, είναι η κατακόρυφη γωνία περιστροφής. Στην αρχή του αρχείου υπάρχει το

```

// POLARANGLERANGE
mainCam_polar_min = 0;
mainCam_polar_max = Math.PI;

```

Οι μεταβλητές *mainCam_polar_min* και *mainCam_polar_max* καθορίζουν τα όρια της πολικής τροχιάς της κύριας κάμερας, η οποία πάντα «βλέπει» στο κέντρο του καμβά σχεδίασης. Οι τιμές ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi]$, με το 0 να αντιστοιχεί στον βόρειο πόλο και το π στον νότιο. Συνήθως χρησιμοποιούμε τα διαστήματα $[0, \pi/2]$ ή $[0, \pi]$. Η σταθερά π στην JavaScript γράφεται *Math.PI*.

Έτσι, αν θέλει να περιστρέφεται κατακόρυφα ο καμβάς στο διάστημα $[\pi/6, \pi/2]$ θα πρέπει να θέσει: *mainCam_polar_min = Math.PI/6;* και *mainCam_polar_max = Math.PI/2;*

Ιδιαίτερες ρυθμίσεις κάποιων προτύπων

Όλες οι παρακάτω παραμετροποιήσεις αναφέρονται στο αρχείο *model*.

Πρότυπο 1-buildFromHeights: Στο πρότυπο αυτό, το μοντέλο πρέπει να κατασκευασθεί σύμφωνα με τον πίνακα υψών που φαίνεται πάνω αριστερά (πρότυπο 1 στο Σχήμα 5). Ο πίνακας καθορίζεται στην ομώνυμη μεταβλητή που βρίσκεται μετά το σχόλιο *HEIGHTS TABLE*. Είναι πίνακας δύο διαστάσεων που αφορά τα ύψη των πυργίσκων. Η διάταξη των πινάκων είναι ορισμένη ως γραμμή, στήλη και η πρώτη γραμμή εφάπτεται της μπλε πλευράς.

```

// HEIGHTSTABLE
heightsTable =
[
  [3,4,5,6,7,7,6,5,4,3],
  [2,0,0,0,0,0,0,0,0,2],
  [2,0,0,0,1,1,0,0,0,2],
  [2,0,0,0,0,0,0,0,0,2],
  [2,0,1,0,2,2,0,1,0,2],
  [2,0,1,0,2,2,0,1,0,2],
  [2,0,0,0,0,0,0,0,0,2],
  [2,0,0,0,1,1,0,0,0,2],
  [2,0,0,0,0,0,0,0,0,2],
  [2,1,1,1,1,1,1,1,1,2]
];

```

Πρότυπο 2-copyBuilding: Σ' αυτό το πρότυπο υπάρχουν 2 κινούμενες κάμερες, η μία για τον κεντρικό καμβά σχεδίασης και η δεύτερη για το μοντέλο. Οι πολικές τροχιές

των καμερών καθορίζονται από τις μεταβλητές: για τον κεντρικό καμβά *mainCam_polar_min*, *mainCam_polar_max* και για το μοντέλο *secCam_polar_min* και *secCam_polar_max*. Οι δύο καμβάδες έχουν την ίδια διάσταση (ως *gridDimension/50*). Ο πίνακας *modelGeometry* καθορίζει πως θα φαίνεται ο καμβάς μοντέλο, ενώ ο πίνακας *canvasGeometry* πως θα φαίνεται ο κεντρικός καμβάς εργασίας (οι αλλαγές γίνονται όπως περιγράφηκε στο Βήμα 2).

Πρότυπο 3-findHeights: Μετά το σχόλιο *HEIGHTS TABLES* υπάρχουν οι μεταβλητές: *modelHeightsTable* και *canvasHeightsTable*. Με την πρώτη καθορίζονται οι θέσεις και τα ύψη των πυργίσκων που θα εμφανίζονται στο μοντέλο. Στον δεύτερο μπορεί να σχεδιάσει μια ημιτελή κατασκευή.

Πρότυπο 5-orthografic: Σ' αυτό το πρότυπο υπάρχουν 5 κάμερες. Η μία βλέπει τον κύριο καμβά ενώ οι υπόλοιπες είναι σταθερές και βλέπουν το μοντέλο. Η ιδιαιτερότητα αυτού του προτύπου προκύπτει από την δυνατότητα να καθορίσουμε ποιες από τις 4 κάμερες του μοντέλου θα λειτουργούν ή όχι. Οι «διακόπτες» των 4 καμερών είναι οι μεταβλητές: *planeView*, *redView*, *blueView* και *greenView*. Βρίσκονται μετά το σχόλιο *CAMERAS* και οι τιμές τους είναι *true* ή *false*. Όπως και στο πρότυπο *copyBuilding* έτσι και σ' αυτό, το μοντέλο καθορίζεται από την μεταβλητή *modelGeometry* (μόνο που φαίνονται οι προβολές του και όχι ολόκληρο στο χώρο).

Πρότυπο 6-orthoViews: Στο συγκεκριμένο πρότυπο υπάρχουν 5 κάμερες που βλέπουν τον κεντρικό καμβά και καθώς τροποποιούμε τη κατασκευή, οι αλλαγές γίνονται άμεσα ορατές από τις σταθερές κάμερες. Η ιδιαιτερότητα αυτού του προτύπου, όπως και στο *orthographic*, προκύπτει από την δυνατότητα να καθορίσουμε ποιες από τις 4 κάμερες του μοντέλου θα λειτουργούν ή όχι (τα ονόματα των μεταβλητών είναι τα ίδια με πριν).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Ένα εργαλείο δεν υπάρχει αφ' εαυτού αλλά μόνο μέσα από την προοπτική της χρήσης του. Ο 'κυβόκοσμος' είναι μια εφαρμογή που μπορεί να αξιοποιηθεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να υπάρχει προστιθέμενη παιδαγωγική αξία. Αυτό που έχει ιδιαίτερη σημασία είναι ότι ο κυβόκοσμος μπορεί να μετατραπεί σε ένα ευέλικτο εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού, το οποίο θα του επιτρέψει να αναπτύξει τη δημιουργικότητά του και να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου, είτε χρησιμοποιώντας το διαθέσιμο έτοιμο υλικό είτε μετασχηματίζοντάς το κατάλληλα. Το ζητούμενο είναι να μετατραπεί ο εκπαιδευτικός από απλό διεκπεραιωτή της διδασκαλίας ενός συγκεκριμένου βιβλίου και μιας αυστηρά καθορισμένης ύλης, σε δημιουργό, σε αυτόν που επιλέγει (από ένα μεγάλο σύνολο δραστηριοτήτων), που σκέφτεται κριτικά, που κάνει το δικό του διδακτικό προγραμματισμό ανάλογα με τις συνθήκες, που παίρνει αποφάσεις. Αυτή η μετατόπιση του ρόλου δεν είναι ούτε εύκολη, ούτε αυτονόητη.

Μπορεί πολλά από τα μικροπειράματα που έχουν αναπτυχθεί ή που θα αναπτυχθούν στα πλαίσια του κυβόκοσμου ή πολλά από τα νοήματα που θα κατασκευάσουν οι μαθητές δουλεύοντας με αυτά να μη συνάδουν πλήρως με τα 'επίσημα' μαθηματικά, πρέπει όμως να ιδωθούν στα πλαίσια μιας αφαιρετικής διαδικασίας που επιτελείται σταδιακά μέσω διαδοχικών εντοπισμένων αφαιρέσεων. Και ίσως αυτός να είναι και ο σημαντικότερος ρόλος του εργαλείου, όχι τόσο δηλαδή να βοηθήσει τους μαθητές να κατασκευάσουν αφαιρετικά νοήματα, αλλά να

λειτουργήσει ως γνωστική σκαλωσιά για την κατασκευή πιο αφηρημένων εννοιών στα πλαίσια της τυπικής διδασκαλίας αργότερα (Papert, 1972) ή μέσα από την ενοποίηση των διαφορετικών εμπειριών στα πλαίσια της τάξης και με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού (Hoyles et al., 2004). Το προσδόκιμο δεν είναι στα πλαίσια μιας περιορισμένης χρονικά δραστηριότητας ή στα πλαίσια ενός και μόνο εργαλείου να εξαντληθεί η 'διδασκαλία' μιας αφηρημένης έννοιας, κάτι που μπορεί να είναι προϊόν μόνο μακροχρόνιων διαδικασιών, αλλά η παροχή εκείνων των διευκολύνσεων που θα επιτρέψουν στους μαθητές να δουν πράγματα που μέχρι τώρα δεν μπορούσαν να δουν, να κατασκευάσουν και να συνδέσουν αναπαραστάσεις με τρόπους που δεν ήταν εφικτοί μέχρι σήμερα, κάτι που αναπόφευκτα θα έχει επιδράσεις και στην μετέπειτα 'τυπικά μαθηματική' δραστηριότητα των παιδιών.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Νέο Πρόγραμμα Σπουδών. ΦΕΚ Β' 2281 3-10-2011 (στη σελίδα <http://digitalschool.minedu.gov.gr>, που λόγω μεγάλου μεγέθους του url έγινε συντόμευση: <http://goo.gl/P8efQ> Ανακτήθηκε στις 10-2-2014) σ.σ. 29.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual

Berthelot, R. & Salin, M.H. (1998). The Role of Pupil's Spatial Knowledge in the Elementary Teaching of Geometry. In C. Mammana & V. Villani (Eds.) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel

Healy, L. (2008). Topic Study Group 15: Technology and Mathematics Education. Paper presented in the *10th International Congress on Mathematics Education* (pp. 355-358), Denmark

Hölzl, R. (1996). How does 'Dragging' affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1(2), 169-187

Hoyles, C., Noss, R. & Kent, P. (2004) On the integration of Digital Technologies into Mathematics Classrooms. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 309-326

Jones, K. (2000) Critical issues in the design of the geometry curriculum, in: B. Barton (Ed), *Readings in Mathematics Education* (Auckland, New Zealand, University of Auckland), pp75-91.

Kaput, J. (1995). Overcoming physicality and the eternal present: Cybernetic manipulatives. In R. Sutherland and J. Mason (Eds), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (161-177). Berlin: Springer.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. And Strasser, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. In A. Gutiérrez, P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, (pp. 275-304), Rotterdam: Sense Publishers.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 2000

Papert, S. (1972). Teaching Children to be mathematicians vs. teaching about mathematics. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 3, 249-262.

Strasser, R. (2001). "Cabri-géomètre: Does a Dynamic Geometry Software (DGS) Change Geometry and its Teaching and Learning?" *International Journal for Computers in Mathematics Learning* 6(3): 319-333.