

Επίλυση προβλήματος με μεταβλητές για την Στ τάξη του δημοτικού σχολείου με τη χρήση του ελεύθερου λογισμικού Geogebra

Σπύρος Κυριαζίδης

Δάσκαλος Προτύπου Πειραματικού Δημοτικού Σχολείου Σερρών
kiriazidiss@yahoo.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σ' αυτή την εργασία χρησιμοποιείται το ελεύθερο λογισμικό Geogebra για την μοντελοποίηση και την επίλυση του παρακάτω προβλήματος:

«Η Σοφία είναι 15 χρονών και η Άννα είναι 3 χρονών. Σε πόσα χρόνια η ηλικία της Σοφίας θα είναι διπλάσια από την ηλικία της Άννας;»

Αυτό το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί με απλή ανάκληση αριθμητικών γεγονότων και εφαρμογή οικείων μοτίβων επίλυσης. Για μαθητές Γυμνασίου που έχουν διδαχθεί Άλγεβρα το πρόβλημα είναι απλό. Λύνεται είτε με το σχηματισμό μιας απλής εξίσωσης, είτε με τη δημιουργία ενός συστήματος εξισώσεων με δύο αγνώστους. Η επίλυση όμως τέτοιων προβλημάτων σε μαθητές του δημοτικού σχολείου, μπορεί να προσφέρει κατάλληλες εμπειρίες στους μαθητές για την εισαγωγή τους σε αλγεβρικές έννοιες. Η μοντελοποίησή του επιτυγχάνεται με την οικεία στους μαθητές από άλλες γνωστικές περιοχές χρήσης της γραμμής του χρόνου. Στην αρχή της εργασίας γίνεται μια σύντομη αναφορά στον ορισμό των εννοιών «πρόβλημα στα μαθηματικά» και «μοντελοποίηση» και στη συνέχεια περιγράφονται τα στάδια διδασκαλίας του στην τάξη.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: επίλυση προβλήματος, Geogebra, μοντελοποίηση

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ένα πρόβλημα παρουσιάζεται όταν κάποιος βρίσκεται αντιμέτωπος με μια δεδομένη κατάσταση και επιθυμεί να φτάσει σε μια άλλη κατάσταση, την κατάσταση στόχο, αλλά δεν υπάρχει κανένας προφανής τρόπος περάσματος από την μια κατάσταση στην άλλη (Mayer, 1983). Στην ουσία κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος, ο λύτης χρησιμοποιεί την υπάρχουσα γνώση για να ανακαλύψει νέα γνώση (Jonassen, 2004).

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

Η μοντελοποίηση στα μαθηματικά είναι ένα αποτελεσματικό μέσο που προάγει την κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων και την καλλιέργεια της κριτικής σκέψης (NCTM, 2000). Τα τελευταία χρόνια όλο και περισσότεροι ερευνητές έχουν εστιάσει το ενδιαφέρον τους στη μοντελοποίηση στα Μαθηματικά.

Τα μοντέλα είναι εννοιολογικά συστήματα που έχουν σα σκοπό να εκφράζονται χρησιμοποιώντας μια μεγάλη ποικιλία αλληλεπιδραστικών μέσων και αναπαραστάσεων, όπως γραπτά σύμβολα, τον προφορικό λόγο, περιβάλλοντα που

έχουν σχεδιαστεί με τη χρήση Η/Υ, διαγράμματα ή γραφικές παραστάσεις ή ακόμα και μεταφορές που βασίζονται στην εμπειρία του κάθε ατόμου. Το μοντέλο πρέπει να μπορεί να περιγράφει και να εξηγεί τις κατάλληλες μαθηματικές έννοιες, σχέσεις, δράσεις, μοτίβα και κανονικότητες που να μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος και να συνοδεύσει διαδικασίες που μπορούν να παράγουν χρήσιμες κατασκευές ή προβλέψεις για την επίτευξη ξεκάθαρων στόχων (Lesh & Doerr, 2003; Lesh, Doerr, Carmona & Hjalmarson, 2003).

Ο όρος «μοντελοποίηση» σημαίνει τη διαδικασία της κατασκευής ενός μοντέλου που ξεκινά από μια πραγματική κατάσταση και οδηγεί σε ένα μαθηματικό μοντέλο ή σε μια διαδικασία επίλυσης προβλήματος ή σε οτιδήποτε συνδέει τον πραγματικό κόσμο με τα μαθηματικά.

Σε μια προσπάθεια να δώσουμε ένα συνεκτικό πλαίσιο της μοντελοποίησης στα μαθηματικά η διεθνής βιβλιογραφία είναι οργανωμένη σε τρία σκέλη (Mousoulides N.G.2007):

Το πρώτο σκέλος περιγράφει τη μοντελοποίηση στα μαθηματικά σαν μια διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Οι μαθητές δηλαδή θα πρέπει: να κατανοήσουν και να μπορούν να απλοποιήσουν ένα πρόβλημα, δηλαδή να κατανοήσουν το λεκτικό σκέλος του προβλήματος, να μπορούν να χρησιμοποιήσουν προηγούμενες γνώσεις που έχουν αποκτήσει και να μπορούν να συσχετίσουν έννοιες από γειτονικά πεδία.

Να μπορούν να διαχειριστούν ένα πρόβλημα ώστε να μπορούν να αναπτύξουν ένα μαθηματικό μοντέλο. Δηλαδή να μπορούν να αναγνωρίσουν τις μεταβλητές και τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους, να κατασκευάσουν υποθέσεις, να χρησιμοποιήσουν στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος που να προκύπτουν από το αναπτυσσόμενο μοντέλο.

Να ερμηνεύουν τη λύση του προβλήματος

Να επαληθεύουν και να επικυρώνουν τη λύση του προβλήματος, δηλαδή να μπορούν να εφαρμόσουν διαφορετικές μορφές αναπαραστάσεων για τη λύση του προβλήματος, να έχουν την ικανότητα να μπορούν να αποτιμούν το αποτέλεσμα των προσπαθειών τους (Blum & Kaiser, 1997; Lesh & Doerr, 2003).

Το δεύτερο σκέλος αναφέρεται στις αρχές που διέπουν τις δραστηριότητες στην τάξη όπου εμπλέκεται η μοντελοποίηση.

Το τρίτο σκέλος αναφέρεται στον τρόπο διδασκαλίας της μοντελοποίησης στα μαθηματικά και στην αξιολόγηση σχετικών δραστηριοτήτων

Οι δραστηριότητες που αναφέρονται στη μοντελοποίηση μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, στην ανάπτυξη και επέκταση σημαντικών μαθηματικών κατασκευών σε άλλες προβληματικές καταστάσεις, στη διερεύνησή τους, στην επέκτασή τους και στη γενίκευσή τους. Βοηθούν δε τους εκπαιδευτικούς να κατανοήσουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών.

Οι μαθηματικές δραστηριότητες που χρησιμοποιούν τη μοντελοποίηση βοηθούν τους μαθητές στην επίλυση προβλημάτων, αλλά και τους εκπαιδευτικούς για να κατανοήσουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών (Doerr,2006). Οι δραστηριότητες που εμπλέκουν μοντέλα χρησιμοποιούν μη τυποποιημένες διαδικασίες που ζητούν από τους μαθητές να ερμηνεύσουν καταστάσεις της καθημερινής ζωής και να τις διατυπώσουν με μαθηματικό τρόπο ή μέθοδο (Lesh & Doerr, 2003; Lesh et al., 2003). Η κατασκευή επομένως του κατάλληλου μοντέλου που να δημιουργεί «νόημα» στους μαθητές και να τους εμπλέκει ενεργά ανεξάρτητα από την ικανότητά τους στα μαθηματικά και η ύπαρξη κριτηρίων που μπορούν να τους βοηθήσουν στην

αποτίμηση των προσπαθειών τους, αποτελούν ουσιαστικούς παράγοντες στην κατασκευή του κατάλληλου μαθηματικού μοντέλου (Lesh & Doerr, 2003).

Σ' αυτή την εργασία χρησιμοποιείται το ελεύθερο λογισμικό Geogebra για την μοντελοποίηση και την επίλυση του παρακάτω προβλήματος (Van Amerom, B. A. 2002):

Η Σοφία είναι 15 χρονών και η Άννα είναι 3 χρονών. Σε πόσα χρόνια η ηλικία της Σοφίας θα είναι διπλάσια από την ηλικία της Άννας;

Η ηλικία της Σοφίας είναι: 15 Η διαφορά της ηλικίας της Άννας από την ηλικία της Σοφίας: 15-3=12
 Η ηλικία της Άννας είναι: 3 Αύξηση της ηλικίας της Άννας: 3=3+0
 Αύξηση της ηλικίας της Σοφίας: 15=15+0
 Η ηλικία της Σοφίας που είναι 15 χρονών θα πρέπει να είναι: 2 φορές η ηλικία της Άννας που είναι: 2*3=6

Χρόνια που πρέπει να περάσουν

Χρόνια που πέρασαν: 0

Χρόνια που πέρασαν: 0

Αριθμός χρόνων που πρέπει να περάσουν 0

Ηλικία Άννας

Δ Γ

Ηλικία Σοφίας



«Η Σοφία είναι 15 χρονών και η Άννα είναι 3 χρονών. Σε πόσα χρόνια η ηλικία της Σοφίας θα είναι διπλάσια από την ηλικία της Άννας;»

Αυτό το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί με απλή ανάκληση αριθμητικών γεγονότων και εφαρμογή οικείων μοτίβων επίλυσης. Για μαθητές Γυμνασίου που έχουν διδαχθεί Άλγεβρα το πρόβλημα είναι απλό. Λύνεται είτε με το σχηματισμό μιας απλής εξίσωσης, είτε με τη δημιουργία ενός συστήματος εξισώσεων με δύο αγνώστους. Για μαθητές Γυμνασίου που έχουν διδαχθεί Άλγεβρα το πρόβλημα είναι απλό. Εάν x είναι τα χρόνια μετά από τα οποία η ηλικία της Σοφίας θα είναι διπλάσια από την ηλικία της Άννας, το πρόβλημα λύνεται με την απλή εξίσωση ενός αγνώστου $15+x=2(3+x) \Rightarrow 15+x=6+2x \Rightarrow 15-6=2x-x \Rightarrow x=9$. Ακόμη μπορεί να λυθεί με σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Σε x χρόνια η ηλικία της Άννας θα είναι ψ και της Σοφίας 2ψ . Άρα, λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων $3+x=\psi$ και $15+x=2\psi$ καταλήγουμε και πάλι στο αποτέλεσμα $x=9$.

Η μοντελοποίησή του επιτυγχάνεται με την οικεία στους μαθητές από άλλες γνωστικές περιοχές (π.χ. ιστορία) χρήση της γραμμής του χρόνου. Χρησιμοποιήθηκε δηλαδή για να οπτικοποιηθούν οι γραμμικές εξισώσεις και να γίνει αναπαράσταση της αγνώστης ποσότητας μία γραμμή όπου το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι το μήκος της γραμμής (γραμμικό μοντέλο) (Van Amerom, B. A. 2002).

Οι αρχές πάνω στις οποίες θα βασιστεί αυτή η δραστηριότητα μοντελοποίησης είναι (Mousoulides N.G.):

Η αρχή της κατασκευής του μοντέλου, δηλαδή τη διαβεβαίωση ότι η λύση του προβλήματος προσπαθεί την κατασκευή μιας σαφούς περιγραφής, εξήγησης, διαδικασίας ή δικαιολογημένης πρόβλεψης για μια κατάσταση όπου εμπλέκονται μαθηματικές έννοιες.

Η αρχή της πραγματικότητας. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές θα πρέπει να αλληλεπιδρούν με τη δραστηριότητα με τρόπο που να δημιουργεί νόημα σε αυτούς ανάλογα με τα διαφορετικά επίπεδα μαθηματικής γνώσης που κατέχουν.

Η τρίτη αρχή είναι **η αρχή της αυτοαξιολόγησης** που περιέχει κριτήρια που μπορούν να αναγνωρίσουν οι μαθητές έτσι ώστε να μπορούν να αναθεωρήσουν σε κάθε στιγμή τον τρόπο σκέψης τους. Η έρευνα έχει δείξει ότι η γνώση από μόνη της δεν επαρκεί για την επιτυχία της μοντελοποίησης στα μαθηματικά. Οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να μπορούν να χρησιμοποιήσουν τη γνώση που θα αποκτήσουν και να μπορούν να παρακολουθούν κάθε στιγμή την πρόοδο που επιτεύχθηκε. Η μεταγνώση εμπλέκει την επίγνωση και τον έλεγχο της σκέψης από τους μαθητές.

Η τέταρτη αρχή είναι **η αρχή της συγγραφής** που διατείνεται ότι οι μαθητές θα πρέπει στο τέλος της διαδικασίας να μπορούν να δημιουργήσουν ένα γραπτό κείμενο που να μπορεί να περιγράψει επαρκώς το πως σκέφτονται όταν έρχονται αντιμέτωποι με μια προβληματική κατάσταση. Η δημιουργία ενός τέτοιου κειμένου είναι πολύ σημαντική όχι μόνο για τους μαθητές αλλά και για τους εκπαιδευτικούς γιατί θα μπορούν με αυτό τον τρόπο να παρακολουθήσουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών τους.

Η πέμπτη αρχή είναι **η αρχή της κοινής χρήσης** και επαναχρησιμοποίησης που απαιτεί από τους μαθητές να παράγουν λύσεις που να μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ανάλογες ή παρόμοιες προβληματικές καταστάσεις που θα συναντήσουν στο μέλλον.

Η έκτη αρχή είναι **η αρχή του αποτελεσματικού πρωτοτύπου** που βεβαιώνει ότι η δραστηριότητα που χρησιμοποιούνται μοντέλα είναι απλή αλλά συγχρόνως συντελεί στη μαθηματοποίηση του μαθητή.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Αυτό το πρόβλημα έχει ως κύριο στόχο:

- Να δώσει στους μαθητές την ευκαιρία να μάθουν να ερευνούν και να συγκροτούν παρόμοιες μεθόδους αντιμετώπισης προβληματικών καταστάσεων και να ασκούν τους μαθητές στο πως να συλλέγουν τα δεδομένα, πως να χρησιμοποιούν τις πληροφορίες, πως να θέτουν και επιπλέον ερωτήματα που ίσως δεν υπάρχουν στα δεδομένα, πως να αναπτύσσουν μεθόδους επίλυσης με διαδοχικές δοκιμές (μέθοδος δοκιμή-λάθος).
- Να συμμετέχουν σε μια κατάσταση έρευνας.
- Να πραγματοποιούν υποθέσεις να τις δοκιμάζουν και να προχωρούν σύμφωνα με αυτά που βρίσκουν.
- Να διορθώνουν τυχόν λάθη.
- Να ελέγχουν συνολικά την κατάσταση και να επανέρχονται από την αρχή στη πορεία της λύσης του προβλήματος.
- Να σκέφτονται, να συνεργάζονται και γενικά να λειτουργούν στα πλαίσια μιας ομάδας.

Η λογική της επίλυσης του προβλήματος επομένως χρησιμοποιείται πλέον για την εισαγωγή νέων εννοιών και για τη δημιουργία διδακτικών καταστάσεων ή καταστάσεων προβληματισμού.

Προαπαιτούμενες γνώσεις

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν:

- Την έννοια της μεταβλητής (οποιοδήποτε γράμμα ή σύμβολο μπαίνει στη θέση μιας άγνωστης ή μεταβαλλόμενης τιμής).
- Να επιλέγουν μεταβλητές και να σχηματίζουν αριθμητικές παραστάσεις.
- Να ορίζουν και να χρησιμοποιούν τις μεταβλητές στις αριθμητικές παραστάσεις.
- Να βρίσκουν το αποτέλεσμα των αριθμητικών παραστάσεων αντικαθιστώντας τη μεταβλητή με τον αριθμό που εκφράζει την τιμή της.
- Την έννοια της εξίσωσης (μια ισότητα που περιέχει μια μεταβλητή).
- Να σχηματίζουν μια εξίσωση.
- Να λύνουν μια εξίσωση με δοκιμές και έλεγχο.
- Τη διαδικασία επίλυσης εξισώσεων με ένα άγνωστο.

ΣΤΟΧΟΙ

Οι μαθητές να κατανοήσουν:

- Ποια είναι τα δομικά χαρακτηριστικά του προβλήματος, π.χ. γνωστές και άγνωστες μεταβλητές, που δημιουργούν το πλαίσιο στο οποίο βασίζονται οι ενέργειες του λύτη.
- Ποια είναι τα συστατικά μέρη του προβλήματος, τα επιμέρους τμήματά του και πως αυτά συνδέονται μεταξύ τους, ώστε να αποτελέσουν τα δομικά στοιχεία της επίλυσης.
- Ποιοι είναι οι επιμέρους υποστόχοι που οδηγούν στο τελικό αποτέλεσμα. Αυτό σημαίνει τόσο την εννοιολογική κατανόηση του προβλήματος όσο και την κατανόηση της διαδικασίας επίλυσης (Alagis, 2003).
- Πότε και πως η αλλαγή τιμής σε μία από τις μεταβλητές έχει άμεση επίδραση σε άλλες μεταβλητές.
- Τις αλγεβρικές έννοιες που υπάρχουν στο πρόβλημα. Το λεξικό της Οξφόρδης ορίζει την Άλγεβρα σαν τη μελέτη των ιδιοτήτων των αριθμών χρησιμοποιώντας γενικούς αριθμούς ή το να κάνει κάποιος υπολογισμούς παρόμοιους με αυτούς που γίνονται στην αριθμητική χρησιμοποιώντας μη αριθμητικά μαθηματικά αντικείμενα (Boyer. C 1991).
- Να αναπαράστησουν μια σχέση περιγραφικά, αριθμητικά, οπτικά ή συμβολικά.

ΠΡΩΤΟ ΣΤΑΔΙΟ

Το πρόβλημα μπορεί να παρουσιαστεί σε μία οθόνη αν γίνει κατάλληλη χρήση του κουτιού επιλογής που φανερώνει ή κρύβει αντικείμενα, ή σε δύο οθόνες αν κριθεί από τον εκπαιδευτικό ότι η παρουσίασή του στους μαθητές δίνει πολλές πληροφορίες στους μαθητές.

Αναπαριστούμε δηλαδή σε δύο γραμμές του χρόνου την ηλικία της Σοφίας και της Άννας. Η διαφορά της ηλικίας της Άννας από την ηλικία της Σοφίας είναι προφανής. Εκείνο που πρέπει να ανακαλύψουν οι μαθητές είναι ότι: όσο αυξάνεται η ηλικία της Σοφίας, τόσο αυξάνεται και η ηλικία της Άννας. Δηλαδή αν η ηλικία της Άννας αυξάνεται κατά ένα έτος, τότε και η ηλικία της Σοφίας αυξάνεται αντίστοιχα. Επίσης ότι η διαφορά των δύο ηλικιών πρέπει να είναι πάντοτε σταθερή και ίση με 12 χρόνια. Ένα άλλο στοιχείο που πρέπει να προσεχθεί ιδιαίτερα είναι ότι δε μπορεί η ηλικία μιας εκ των δύο κοριτσιών να αυξάνεται περισσότερο από την ηλικία του άλλου κοριτσιού. Και τα δύο κορίτσια μεγαλώνουν ταυτόχρονα. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση του δρομέα που δίνει την ανάπτυξη των κοριτσιών κάθε χρόνο. Εναλλακτικά ο εκπαιδευτικός μπορεί να βάλει τους μαθητές πριν ακόμα να κατανοούν

τα δεδομένα του προβλήματος, να τους πει να γράψουν τις ηλικίες των κοριτσιών κάθε χρόνο σε ένα πρόχειρο σημειωματάριο και στη συνέχεια αφού γίνει συζήτηση στην τάξη να επαληθεύσουν ή να διαψεύσουν τις προβλέψεις που έκαναν κάνοντας χρήση του δρομέα.

Όλα τα παραπάνω πρέπει να προσεχθούν από την αρχή, στο στάδιο της κατανόησης του προβλήματος και να αποσαφηνισθούν τυχόν σκοτεινά σημεία που παραμένουν αδιευκρίνιστα ή δυσκολονόητα από τους μαθητές.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΣΤΑΔΙΟ

Στη συνέχεια αφού κατανοηθούν τα παραπάνω πρέπει οι μαθητές να καθοδηγηθούν έτσι ώστε να βρουν τη σχέση που συνδέει την αύξηση της ηλικίας της Σοφίας και της Άννας και τα κοινά σημεία που υπάρχουν. Αυτά είναι:

- Για την ηλικία της Σοφίας: η ηλικία της συν ένας αριθμός
- Για την ηλικία της Άννας: η ηλικία της συν ένας αριθμός

Αν μετακινήσουν το δρομέα σε διάφορες θέσεις θα δουν ότι αυτός ο αριθμός που πρέπει να προστεθεί στην ηλικία της Σοφίας και στην ηλικία της Άννας είναι ο ίδιος.

Άρα: η ηλικία της Σοφίας είναι ίση με 15 συν ένα αριθμό που μπορούν να τον ονομάσουν «α», και η ηλικία της Άννας είναι ίση με 3 συν τον ίδιο αριθμό. Μπορούν επίσης να χρησιμοποιήσουν την πένα και να ζωγραφίσουν αυτό τον αριθμό, αναπαριστώντας τον με το γράμμα «α».

Στη συνέχεια μετακινώντας το δρομέα σε διάφορες θέσεις, επαληθεύουν τους ισχυρισμούς τους, βλέπουν δηλαδή ότι ο αριθμός που πρέπει να προστεθεί στην ηλικία της Άννας και της Σοφίας είναι ο ίδιος.

ΤΡΙΤΟ ΣΤΑΔΙΟ

Το επόμενο βήμα θα είναι να βρουν οι μαθητές πότε η ηλικία της Σοφίας γίνεται ίση με το διπλάσιο της ηλικίας της Άννας. Αν μετακινήσουν το δρομέα στην αρχική του θέση (θέση 0) και στη συνέχεια τον μετατοπίσουν προοδευτικά σε διάφορες θέσεις (1,2,3,4,5,6,7,8,9), θα δουν ότι η ηλικία της Σοφίας είναι διπλάσια από την ηλικία της Άννας όταν ο δρομέας βρεθεί στη θέση 9, δηλαδή όταν περάσουν 9 χρόνια από τη στιγμή που μας λέει το πρόβλημα. Αυτό που βρήκαμε στην ουσία δεν είναι τίποτε άλλο παρά η λύση της εξίσωσης ενός αγνώστου που είναι της μορφής: $15+a=2(3+a)$, ή του συστήματος των δύο εξισώσεων της μορφής $3+a=\psi$ $15+a=2\psi$. Σε κάθε φάση του προβλήματος οι μαθητές μπορούν να δουν οπτικοποιημένα τα αποτελέσματα των ενεργειών τους στις γραμμές του χρόνου για τα δυο κορίτσια.

Οι μαθητές μπορούν εύκολα και γρήγορα να πειραματίζονται με τις τιμές των μεταβλητών και να παρατηρούν τις αλλαγές που συμβαίνουν, με αποτέλεσμα να κατανοούν καλύτερα τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών και τους διαφορετικούς τύπους των μαθηματικών μοντέλων. Η άμεση ανατροφοδότηση που υπάρχει προωθεί την λογικομαθηματική σκέψη και κατευθύνει προς την διεξαγωγή ορθών συμπερασμάτων (Koedinger, 1997). Μπορούν επίσης να αλλάξουν τις τιμές που παίρνει ο δρομέας και να παρατηρήσουν τι θα γινόταν αν η ηλικία της Σοφίας και της Άννας ήταν μικρότερη από 15 και 3 χρόνια αντίστοιχα.

Ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να αλλάξει τα δεδομένα του προβλήματος και να δημιουργήσει παρόμοια προβλήματα.

Στο λογισμικό έχει προστεθεί και ένα επιπλέον κουτί εισαγωγής που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά από τους μαθητές και υποκαθιστά στην ουσία το

δρομέα. Η χρήση του κουτιού εισαγωγής επιτρέπει στους μαθητές να εισάγουν οι ίδιοι τιμές και να παρατηρήσουν τα αποτελέσματα των ενεργειών τους.

Οι μαθητές κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος μπορούν να κάνουν τα εξής λάθη:

- Να εξετάσουν μια μόνο συνθήκη αντί για δύο.
- Να εφαρμόσουν τις σχέσεις σε αριθμούς αντί να τις εφαρμόσουν σε αγνώστους.
- Οι έννοιες που έχουν οι μαθητές για τους αριθμούς και για τις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στους αριθμούς μπορεί να εμποδίσουν την εμφάνιση αλγεβρικών εννοιών. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα όταν οι μαθητές αντιμετωπίζουν το πρόβλημα από μια αριθμητική προοπτική στο πως οι ποσότητες που εμφανίζονται σχετίζονται μεταξύ τους, αυτό μπορεί να τους κάνει να επικεντρώσουν την προσοχή τους στα γνωστά στοιχεία του προβλήματος, παρά στους αγνώστους.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη διδασκαλία που πραγματοποιήθηκε με τη χρήση του λογισμικού τα συμπεράσματα ήταν τα εξής. Αδιαμφισβήτητα υπήρχε καλύτερη οπτικοποίηση (η παραγωγή και η διαδικασία της δημιουργίας, ερμηνείας και αλληλεπίδρασης πάνω σε εικόνες και σχήματα. (Arcanι, A.2003)) του προβλήματος με το γραμμικό μοντέλο που δημιουργήθηκε και μεγαλύτερη απόκριση των μαθητών στη συζήτηση που διεξάχθηκε σε σχέση με τη διδασκαλία που πραγματοποιήθηκε σε άλλη τάξη όπου οι μαθητές χρησιμοποίησαν πίνακες για τη λύση του χωρίς φυσικά να χρησιμοποιήσουν το λογισμικό που κατασκευάστηκε με το Geogebra. Συγκεκριμένα οι μαθητές κατασκεύαζαν πίνακες που είχαν αυτή τη μορφή:

Ηλικία Σοφίας	Ηλικία Άννας
15	3
16	4
17	5
18	6
19	7
20	8
21	9
22	10
23	11
24	12
25	13
26	14
27	15
28	16

Η κατασκευή των πινάκων αποδείχθηκε από τη συζήτηση που ακολούθησε ότι ήταν μια διαδικασία που ενώ οδηγούσε στη σωστή λύση του προβλήματος δεν ήταν όμως ικανή να οδηγήσει τους μαθητές στην ορθή διατύπωση των σχέσεων που υπάρχουν ανάμεσα στην ηλικία της Σοφίας και στην ηλικία της Άννας, πολύ δε περισσότερο στη γενίκευσή τους και στην εμφάνιση αλγεβρικών εννοιών όπως περιγράφηκε παραπάνω. Τα συμπεράσματα που έβγαζαν αφορούσαν περισσότερο τη σύγκριση της ηλικίας της Σοφίας και της Άννας αποσπασματικά: π.χ. εστίαζαν την

προσοχή τους μόνο στο πότε ηλικία της Σοφίας είναι πενταπλάσια, τετραπλάσια ή διπλάσια από την ηλικία της Άννας παραβλέποντας όλα τα άλλα δεδομένα του πίνακα.. Όταν τους ζητούνταν να μαντέψουν την ηλικία της Σοφίας ή της Άννας χωρίς ή με τη χρήση πίνακα με δεδομένη την ηλικία της μιας εκ των δύο δεν μπορούσαν να βρουν ότι για να βρούμε π.χ. την ηλικία της Άννας όταν η Σοφία είναι 28 ετών πρέπει να προσθέσουμε στην ηλικία της Άννας που μας δόθηκε σαν δεδομένο από το πρόβλημα τον αριθμό 13. Επίσης αδυνατούσαν να δουν ότι ο αριθμός 13 συγχρόνως είναι και το αποτέλεσμα της αφαίρεσης που προκύπτει όταν από την αφαίρεση $28-15=13$.

Επίσης μεγαλύτερη συμμετοχή και αυτονομία στις κινήσεις τους και άμεση απόκριση στα ερωτήματα που οι ίδιοι υπέβαλαν. Πολλές φορές αρκούσε η προτροπή του εκπαιδευτικού για να βρουν απάντηση στα ερωτήματα που οι ίδιοι έθεταν μετακινώντας το δρομέα σε διάφορες θέσεις. Η κατανόηση των σχέσεων ήταν πιο εύκολη και υπήρχε περιγραφική και λεκτική διατύπωση τους. Επίσης επειδή τα δεδομένα ήταν άμεσα προσβάσιμα και υπήρχε το στοιχείο της δοκιμής και επαλήθευσης μπορούσαν κάθε στιγμή να ανατρέξουν σε επιμέρους ερωτήματα που είτε δεν είχαν κατανοήσει απόλυτα, είτε δεν είχαν συγκρατήσει στη μνήμη τους.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Alagic, M. (2003). Technology in the Mathematics Classroom: Conceptual Orientation. *Jl. Of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 22:4, 381-399.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. In T. Breiteig, I. Huntley, and G. Kaiser-Messmer (Eds.), *Teaching and learning mathematics in context* (pgs. 3-14). New York: Ellis Horwood

Boyer, Carl B. (1991), *A History of Mathematics* (Second Edition ed.), John Wiley & Sons, Inc

Doerr, M. H. (2006). Examining the tasks of teaching when using students' mathematical thinking, *Educational Studies in Mathematics*, 62(1), 3-24

Doerr, M. H. (2006). Teachers' ways of listening and responding to students' emerging mathematical models. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 255 – 268.

Jonassen, D. (2004). *Learning to solve problem: An instructional design guide*. San Francisco, CA: Jossey-Bass

Koedinger, K.R., Anderson, J.R., Hadley, W.H., et al. (1997). Intelligent tutoring goes to school in the big city. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 8, 30-43.

Lesh, R., & Doerr, H.M. (2003). *Beyond Constructivism: A Models and Modeling Perspective on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R., & Doerr, H.M. (2003). *Beyond Constructivism: A Models and Modeling Perspective on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewski, J. (2003). Model development sequences. In R. Lesh and H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models*

& modeling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching (pp. 35–58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc

Lesh, R., Doerr, H. M., Carmona, G., & Hjalmarson, M. (2003). Beyond constructivism. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2), 211-234.

Mayer, R. E. (1983). *Thinking, Problem Solving and Cognition*. San Francisco: W.H. Freeman & Co.

Mousoulides, N. (2007). *A Modeling Perspective in the Teaching and Learning of Mathematical Problem Solving*. Unpublished Doctoral Dissertation. University of Cyprus.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Van Amerom, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra: developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. Utrecht: CD-B Press, Center for Science and Mathematics Education, Utrecht University.